目　录

第一编　点集拓扑学

第二编　多面体的同调群

第三编 多面体的同调论

第一章　度 量 空 間

度量空間是 n 維欧几里得空間 E^n 的极为接近、极为自然的推广，而且从它又可以很自然地过渡到更广的、更抽象的、但有必要加以研究的拓扑空間．另一方面，它的范圍已够广泛，包括了在数学中遇到的一些函数空間、Hilbert 空間等；因而度量空間的理論已成为学习近代数学所不可缺少的知識．

本章将介紹度量空間的一些基本概念与性质，以及从度量空間到度量空間的連續映射的一些基本概念与性质．理解它們的最好途徑，是用欧几里得空間 E^n 的相应概念与性质作为模型．至于它們的安排与証明，則将受到下一章中拓扑空間的討論的影响．

1．度量空間·球形邻域

至多三維的欧几里得空間 E^n, $n\leqslant 3$, 是我們从直观以及解析几何課程所知道的空間．設 x 与 y 是它的两点，分别以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为坐标；这两点之間的距离是

$$d(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

当 $n>3$ 时，已經无直观的 E^n；但我們把 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫作点 x: $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而且把 $d(x, y)$ 作为点 x 与点 y 之間的距离，于是得到 n 維的欧几里得空間 E^n, $n>3$. 为簡便起見，对于任意正整数 n, 我們都把点 x 与 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看作是等同的．

用 R^n 表示 E^n 的点的集合．R^1 当然就是实数集合．这里我

們严格地用集合这概念；即 R^n 的元素或点完全确定了，但点与点之間未确定任何关系，特别未确定距离关系 d. 集合 R^n 加上距离关系 d 才是我們的 n 維欧几里得空間 E^n；在这意义下，我們說 d 賦予集合 R^n 一个“空間結构”.

从 R^n 到 R^1 的一个对应 $f: R^n \to R^1$ 就是 n 个实变数的一个实値函数 $f(x)$. （只限于单値对应与单值函数.） 但当我們說函数 $f(x)$ 連續时，我們就用了距离 d 的概念；所指的实际是对应 $f: E^n \to E^1$. 所以函数 $f(x)$ 的連續性所需要的，不仅有集合概念，还有空間結构的概念.

本节的目的是用 E^n 作背景来引进度量空間.

1.1 定义 設 S 是一个集合，其元素叫作点，記作 x, y, z 等，而且 $\rho: S \times S \to R^1$ 是满足下列三条公理的一个非負实函数*)：

1° $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$；

2° 对称性：$\rho(y, x) = \rho(x, y)$；

3° 三角形不等式：$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

点集 S 与函数 ρ 在一起，叫作一个**度量空間**，記作 (S, ρ). S 的点或子集仍分别叫作 (S, ρ) 的点或子集，函数 ρ 叫作 (S, ρ) 的**距离函数**或**度量**，$\rho(x, y)$ 叫作点 x 与 y 之間的**距离**.

例 1.1 n 維的欧几里得空間 $E^n = (R^n, d)$ 是一个度量空間. 距离函数 $d(x, y)$ 显然满足前两条度量公理. 它也满足第三条公理：对于任意正整数 n, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$；証明见例 A2.2.

例 1.2 用例 1.1 中的 R^n 作为集合 S，在 S 上定义非負实函数

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

或

$$d_2(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i - y_i|\}.$$

*) $S \times S$ 表示集合 $\{(x, y) | x, y \in S\}$.

可以验证 d_k 满足度量公理，故 (R^n, d_k) 是度量空间. $k=1$ 或 2. (复习题.)*)

建议读者对于 $n=2, 3$ 作出 $d_k(x, 0)=1$ 的图形，并补出这里未给出的证明，作为复习时的思考题.

例 1.3 Hilbert 空间 E^ω 从 n 维的欧几里得空间 E^n 中三角形不等式，我们知道，对于 E^n 的三个点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(0, 0, \cdots, 0)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

既然对于任意正整数 n 这不等式成立，经过取极限(当 n 无限增大)，有下列结论：如果序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 使级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^2$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}y_i^2$ 收敛，则序列 $\{x_n-y_n\}$ 也使级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2$ 收敛(只限于无穷序列).

现在定义 Hilbert 空间 E^ω 如下. 它的点 x 是使得级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^2$ 收敛的实数序列 $x=\{x_n\}$. 它的两点 x 与 y 之间的距离是

$$\rho(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

它是一个确定的实数，正是上文所说的. 距离函数 ρ 显然满足前两条度量公理. 因为

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

再经过取极限，就证明了 ρ 也满足第三条度量公理.

空间 E^ω 的子集

$$\{x=\{x_n\} \mid 0\leqslant x_n\leqslant 1/n\}$$

叫作 Hilbert 空间的**基本方体**.

例 1.4 一些函数空间. 在分析数学中时常遇到以某类函数为元素的集合 S，而为着便于处理所考虑的问题，又必须在 S 中引进度量 ρ，使 (S, ρ) 形成度量空间.

a. 在讨论函数的逼近或一致收敛时，集合 S 的元素是闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数. 两个元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 只当 $|x(t)-y(t)|$ 在整个区间上都很小，才认为很邻近；明确地说，即引进的度量是

$$\rho(x(t), y(t))=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|.$$

*) 此后，一个命题之后出现"(复习题.)"时，都是建议读者补出这命题的证明.

b. 在变分法与微分方程的稳定性理论等中，集合 S 的元素是闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的可微 k 次的函数. 二元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的邻近,不仅要求 $|x(t)-y(t)|$ 很小，而且要求 $|x'(t)-y'(t)|$, $|x''(t)-y''(t)|$, …, $|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|$ 都很小,对于任意 t. 这时候引进的度量是

$$\rho(x(t),\ y(t))=\sum_{i=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|,$$

或
$$=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)-y(t)|,\ |x'(t)-y'(t)|,\ \cdots,\ |x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|\},$$

参看例1.2.

c. 在积分方程论中,集合 S 同例1.4a, 但引进的度量是

$$\rho(x(t),\ y(t))=\left[\int_a^b[x(t)-y(t)]^2dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

可以验证,这些函数 ρ 都满足度量公理.(复习题.)

例1.5 设 S 是任一集合，其元素记作 x, y 等，定义 $\rho(x,\ x)=0$, 而 $\rho(x,\ y)=1$ 当 $x\neq y$. 这里的 $(S,\ \rho)$ 是一个度量空间,叫作**离散的**度量空间.

例1.6 设 $(S,\ \rho)$ 是任意的一个度量空间. 定义

$$\rho_1(x,\ y)=\rho(x,\ y)/\{1+\rho(x,\ y)\},$$

或

$$\rho_2(x,\ y)=\begin{cases}\rho(x,\ y), & \text{当 } \rho(x,\ y)\leqslant 1,\\ 1, & \text{当 } \rho(x,\ y)>1.\end{cases}$$

这里的 ρ_1 与 ρ_2 都满足度量公理.(复习题.)

设 $(S,\ \rho)$ 是一个度量空间,而且 A 是 S 的一个子集. 用记号 $\rho|A\times A: A\times A\to R^1$ 表示 ρ 限制在 $A\times A$ 上；它显然满足三条度量公理,所以 $(A,\ \rho|A\times A)$ 还是一个度量空间,叫作 $(S,\ \rho)$ 的一个**子空间**,简记为 $(A,\ \rho)$, 或甚至于记为 A. 凡遇到 $A\subset S$, 而说 A 是 $(S,\ \rho)$ 的子空间时,所指的就是 $(A,\ \rho|A\times A)$.

度量空间的子空间还是度量空间. 欧几里得空间的子空间是度量空间,但不一定是欧几里得空间.

要想从已知的度量空间作出新度量空间,除去作子空间外,还可作积空间. 设 $(S_1,\ \rho_1)$ 与 $(S_2,\ \rho_2)$ 是两个度量空间. 命

$$S=S_1\times S_2=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1\in S_1,\ x_2\in S_2\},$$

$$\rho((x_1,\ x_2),(y_1,\ y_2))=[\rho_1^2(x_1,\ y_1)+\rho_2^2(x_2,\ y_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证$(S,\ \rho)$是一个度量空间；叫作$(S_1,\ \rho_1)$与$(S_2,\ \rho_2)$的**积空间**，记作$(S_1,\ \rho_1)\times(S_2,\ \rho_2)$. 例如$E^n=E^1\times E^{n-1}=(E^1)^n$，$n>1$.

积空间$(S,\ \rho)^n$中的函数可以看作是n元函数.

欧几里得空间的点是用实数来作坐标的. 实数虽然不能用来刻划一般的度量空间的点，但能用来刻划度量空间的两点的远近.

1.2 定义 设a是度量空间$X=(S,\ \rho)$的任一点，ε是任一正数. X中的、满足不等式$\rho(x,\ a)<\varepsilon$的点x的集合，叫作点a的、在X中的一个**球形邻域**，记作$U(a,\ \varepsilon)$.

在不会引起混淆时，只说$U(a,\ \varepsilon)$是a的一个球形邻域，而省略不提"在$(S,\ \rho)$中的".

建议读者在平面与空间(即$n=2,\ 3$)的直角坐标系中，作出例1.2的单位球形邻域的图.

1.3 定理 度量空间$X=(S,\ \rho)$的点与它们的球形邻域具有下列二性质:

1° 每一点x都有球形邻域，点x的每一球形邻域都包含x;

2° 如果点x属于两个球形邻域$U(x_i,\ \varepsilon_i)$的交集，$i=1,\ 2$，则x有一球形邻域$U(x,\ \varepsilon)\subset$这交集.

证 明 性质1°是明显的. 要证性质2°，只要取$\varepsilon\leqslant\varepsilon_i-\rho(x,\ x_i)$，$i=1,\ 2$. 事实上，设$y$是$U(x,\ \varepsilon)$的任一点. 然后

$$\rho(x,\ y)<\varepsilon\leqslant\varepsilon_i-\rho(x,\ x_i),$$

即有$\rho(x_i,\ y)<\varepsilon_i$；因而$y\in U(x_i,\ \varepsilon_i)$. ▌

在性质2°的陈述与证明中，并未排斥$x_1=x_2$，或$x_1=x_2$而且$\varepsilon_1=\varepsilon_2$.

习　　題

1. 試証：Hilbert 空間 E^ω 的任二点 x 与 y 有一"中点" z，即点 z 使得

$$\rho(x, z)=\rho(y, z)=\frac{1}{2}\rho(x, y).$$

但度量空間不必有此性质；試用欧几里得平面 E^2 的一个子空間为例說明.

2. 試証：度量空間中任意一个三角形的两边的长度之差不大于第三边的长度.

3. 設 S 是一个集合，而且 $\{A_\alpha\}$ 是 S 的一族子集，这里的下标 α 所取的值的个数可以是有限或无穷. 試証 de Morgan 公式：

$$S-\bigcup_\alpha A_\alpha=\bigcap_\alpha(S-A_\alpha),$$

$$S-\bigcap_\alpha A_\alpha=\bigcup_\alpha(S-A_\alpha).$$

4. 設 $f: S\to T$ 是从集合 S 到集合 T 的单值对应. 試証：对于 T 的任一子集 B，

$$ff^{-1}(B)\subset B,$$
$$f^{-1}(T-B)=S-f^{-1}(B).$$

2. 四个基本概念：开集、閉集、閉包、收斂序列

本节从球形邻域出发，介紹度量空間的一些重要的子集.

2.1 定义　設 A 是度量空間 X 的一个子集. 如果 A 的每一点都有一个球形邻域 $\subset A$，則 A 叫作 X 的**开集**.

如果 A 的一点 a 有一个球形邻域 $\subset A$，則点 a 叫作 A 的、在 X 中的一个**內点**. A 的、在 X 中的內点的全体，叫作 A 的、在 X 中的**內部**，記作 $\operatorname{Int} A$.

在不会引起混淆时，例如在 X 已經給定时，我們也把"X 的开

集”，“在 X 中的一个內点”，“在 X 中的內部”等句子中的“X 的”或“在 X 中的”省略不提.

从定义立刻知道

2.1.1 命題　A 是开集 $\Leftrightarrow A$ 是若干球形邻域的并集.（复习題.）

2.1.2 命題　$\operatorname{Int} A$ 是开集.

定义 1.2 与 2.1 中的球形邻域都是指以正实数为半徑的球形邻域. 如果只限于用以正有理数为半徑的球形邻域，則得到开集的一个新定义. 設 $A \subset X$. 容易驗証：

2.1.3 命題　A 根据定义 2.1 是 X 的开集 $\Leftrightarrow A$ 根据新定义是 X 的开集.（复习題.）

2.2 定义　度量空間 X 的一个子集 A 叫作 X 的**閉集**，如果 A 在 X 中的余集 $X-A$ 是 X 的**开集**.

例 2.1　如果把集合 $A=\{x \mid 0<x<1\}$ 看作是直綫 E^1 的子集，則 A 是 E^1 的开集. 如果把 A 看作是平面 E^2 的子集，則 A 既不是 E^2 的开集，又不是 E^2 的閉集.

2.3 定理　度量空間 X 的开集具有下列三性质：

1° X 与空集 $\emptyset$ 是开集；

2° 两个开集的交集是开集；

3° 任意多个开集的并集是开集.

証　明　性质 1° 与 3° 是明显的. 現在証明性质 2°.

如果两个开集 A 与 B 的交集 $A \cap B$ 是空集，則从性质 1°，它是开集. 如果 $A \cap B$ 非空集，設点 x 是它的任一点. 因为 A 与 B 都是开集，点 x 是它們的內点；从定义 2.1，x 有一邻域[*] $U(x, \varepsilon_1) \subset A$，一邻域 $U(x, \varepsilon_2) \subset B$；因而 $U(x, \varepsilon_1) \cap U(x, \varepsilon_2) = A \cap B$. 从定理 1.3 中的 2°，$x$ 有一邻域 $U(x, \varepsilon) \subset U(x, \varepsilon_1) \cap U(x, \varepsilon_2)$

[*] 本章中出現的“邻域”都是球形邻域的簡称.

$\subset A\cap B$. [实际上,如果取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,则 $U(x,\varepsilon)=U(x,\varepsilon_1)\cap U(x, \varepsilon_2)$.] 再从定义 2.1, x 是 $A\cap B$ 的内点;因为 x 是 $A\cap B$ 的任一点,所以 $A\cap B$ 是开集. ▌

2.4 定理 度量空間 X 的閉集具有下列三性质:

1° X 与空集 $\emptyset$ 是閉集;

2° 两个閉集的并集是閉集;

3° 任意多个閉集的交集是閉集.

証 明 由于 de Morgan 公式(§1中习題3),本定理与定理 2.3 二者中之一是另一个的直接推論. ▌

例 2.2 有限子集是閉集;特别地,独点集(单独一点所成的集合)是閉集. 直綫 E^1 的开集 $A=\{x|0<x<1\}$ 是无穷多个閉集的并集. 試举例說明:无穷多个开集的交集不必是开集.

在数学分析中,极限概念是連續性概念的基础. 現在要把它推广到度量空間.

2.5 定义 設 A 是度量空間 X 的一个子集,而且点 $x\in X$. 如果 x 的、在 X 中的每一球形邻域都包含 $A-\{x\}$ 的一个点*),则 x 叫作 A 的、在 X 中的一个**聚点**. A 与它的、在 X 中的全体聚点的并集,叫作 A 的、在 X 中的**閉包**,記作 $\overline{A}$. 如果 $\overline{A}=X$,则把 A 叫作 X 的**稠密子集**.

例 2.3 設 $X=E^1$. 如果 $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$,则点 $x=\frac{1}{n}\in A$,但非 A 的聚点,点 $x=0\,\overline{\in}\,A$ 而是 A 的聚点. 如果 $A=\{x|0\leqslant x<1\}$,点 $x=0$ 与 $x=1$ 都是 A 的聚点,但前者 $\in A$,后者 $\overline{\in}\,A$. 如果 A 是 E^1 的有理点的集合,则 E^1 的每一点都是 A 的聚点,而且 $\overline{A}=E^1$.

从定义 2.5 容易驗証:

2.5.1 命題 X 的有限子集无聚点;

*) 如果 $x\,\overline{\in}\,A$,则 $A-\{x\}$ 就是 A.

2.5.2 命題　如果 X 的无穷子集 A 的每二点的距离都大于一个固定的正数，則 A 无聚点；

2.5.3 命題　对于任意 $A\subset X$，$\bar{A}$ 是閉集；

2.5.4 命題　A 是閉集 $\Leftrightarrow \bar{A}=A$.（复习題.）

2.6 定理　度量空間的子集与它們的閉包具有下列四个性质：

1°　$\bar{\emptyset}=\emptyset$；

2°　$A\subset\bar{A}$；

3°　$\bar{\bar{A}}\subset\bar{A}$；

4°　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

証　明　从定义 2.5 立刻有性质 1° 与 2°.

現在証明性质 3°：$\bar{\bar{A}}$ 的任一点 x 必 $\in\bar{A}$. 从定义 2.5，$x\in\bar{\bar{A}}\Rightarrow x$ 的每一邻域 $U(x)$ 包含 $\bar{A}$ 的一点 y；$y\in\bar{A}\Rightarrow y$ 的每一邻域 $W(y)$ 包含 A 的一点. 从定理 1.3 中的性质 2°，可取 $W(y)\subset U(x)$；然后知 x 的每一邻域 $U(x)$ 包含 A 的一点. 再从定义 2.5，这就 $\Rightarrow x\in\bar{A}$.

性质 4° 的一部分：$\overline{A\cup B}\supset\bar{A}\cup\bar{B}$，是下面事实的明显推論：$A\cup B\supset A\Rightarrow\overline{A\cup B}\supset\bar{A}$. 所以剩下要証明的是性质 4° 的另一部分：$\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$，即 $\overline{A\cup B}$ 的任一点 x 如果 $\bar{\in}\bar{A}$，則 $\in\bar{B}$.

我們用反証法来証明这一部分. 設在 $x\bar{\in}\bar{A}$ 的情形下，同时还有 $x\bar{\in}\bar{B}$. 从定义 2.5，x 有一邻域 $U(x)$ 不包含 A 的点，与一邻域 $V(x)$ 不包含 B 的点；从定理 1.3 中的性质 2°，x 有一邻域 $W(x)\subset U(x)\cap V(x)$，因而不包含 $A\cup B$ 的点；这与 $x\in\overline{A\cup B}$ 矛盾. ▌

注意，性质 2° 与 3° $\Rightarrow\bar{\bar{A}}=\bar{A}$.

現在我們指出子集的閉包与收斂点序列的极限点之間的关系. 先重复我們习知的定义.

2.7 定义 設 X 是一个度量空間. 設 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个点序列, a 是 X 的一点. 如果对于点 a 的每一个球形邻域 $U(a, \varepsilon)$, 存在一个自然数 N, 使得 $x_n \in U(a, \varepsilon)$, 对于所有 $n>N$, 点 a 叫作这**序列的一个极限点**, 或者說这序列**收斂, 收斂到点** a.

序列 $\{x_n\}$ 收斂到点 a 的条件, 也可以用度量函数 ρ 来表示为 $\lim \rho(a, x_n)=0$.

下面的三个命題的証明留給讀者. 后两个命題将来时常引用, 值得特别注意.

2.7.1 命題 度量空間 X 中的一个收斂序列只有唯一的一个极限点. (复习題.)

2.7.2 命題 度量空間 X 的一点 a 是 X 的一个子集 A 的聚点 $\Leftrightarrow A-\{a\}$ 中存在一个由完全不同的点所組成的点序列, 以 a 为极限点. (习題 4.)

2.7.3 命題 如果**序列** $\{x_n\}$ 由完全不同的点組成, 而且无穷**子集** $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ 以 a 为一个聚点, 則序列 $\{x_n\}$ 有一个子序列收斂到点 a. (习題 5.)

在本节結束前我們指出二点間的距离这一概念的三个常用的推广. 第一, 度量空間 X 的二子集 A 与 B 間的距离:

$$\rho(A, B)=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 或 } B \text{ 是空集;}\\ \inf\{\rho(x, y) \mid x\in A,\ y\in B\}, & \text{当 } A \text{ 与 } B \text{ 都非空集.}\end{cases}$$

第二, X 中一点 x 到一子集 A 的距离 $\rho(x, A)$; 它是第一个的特别情形. 第三, X 的一子集 A 的直徑:

$$\operatorname{diam}(A)=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 是空集;}\\ \sup\{\rho(x, y) \mid x,\ y\in A\}, & \text{当 } A \text{ 非空集.}\end{cases}$$

容易看出，$x \overline{\in} A \nRightarrow \rho(x, A)>0$；$A \cap B=\emptyset \nRightarrow \rho(A, B)>0$. 值得注意的是：

2.7.4 命題 如果$A \neq \emptyset$，則$x \overline{\in} \bar{A} \Rightarrow \rho(x, A)>0$.（复习題.）

习 題

1. 設f是欧几里得空間E^n中的連續函数. 試証满足$f>0$（$f=0$或$f \geqslant 0$）的点集是E^n的开（閉）子集.

2. 試証 $\operatorname{Int} A$ 是A所包含的所有的开集的并集. 因而它是A所包含的最大开集.

3. 試証$\bar{A}$是所有包含A的閉集的交集. 因而它是包含A的最小閉集.

4. 試証命題2.7.2.

5. 試証命題2.7.3.

3. 連續映射·拓扑映射

第一节开始时我們說过，要想定义連續函数，必須先定义空間. 現在已有了度量空間，我們将进而定义度量空間之間的、与連續函数相应的映射.

3.1 定义 設X与Y都是度量空間，$f: X \rightarrow Y$是一个从X到Y的对应，而且点$x_0 \in X$. 如果給定任一邻域$U(f(x_0), \varepsilon)$，都存在一邻域$U(x_0, \delta)$，使得$x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$，則說$f$**在点$x_0$处連續**. 如果$f$在$X$的每一点处連續，則說$f$**在$X$中連續**；这时候$f: X \rightarrow Y$叫作一个**連續映射**或簡称为**映射**. X与Y分别叫作f的定义空間与值空間.

当$Y=E^1$时，映射f通常叫作連續实值函数，或簡称**連續函数**.

設 A 是 X 的子集. $f(A)$叫作 A 的在 f 下的**象**. 如果 B 是 Y 的子集, 則集合 $\{x|f(x)\in B\}$ 叫作 B 的在 f 下的**原象**, 記作 $f^{-1}(B)$. 如果 $f(X)=Y$, 我們就說 f 是从 X 到 Y 的**滿对应**. 如果 $A\subset X$, 而且 $g: A\to Y$ 使得 $g(a)=f(a)$, 对于所有的 $a\in A$, 則 g 叫作 f 的在 A 上的**限制**, 記作 $g=f|A$. 容易驗証: f 是映射 $\Rightarrow g$ 是映射. (复习題.) 如果 g 是 f 的在 A 上的限制, 則 f 叫作 g 的在 X 上的**扩張**.

3.2 定理 設 X 与 Y 都是度量空間. 对于对应 $f: X\to Y$, 下列五条件中的每两个都等价:

$1°$ f 是映射;

$2°$ Y 的每一开集的在 f 下的原象都是 X 的开集;

$3°$ Y 的每一閉集的在 f 下的原象都是 X 的閉集;

$4°$ 对于 X 的每一子集 A, $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$;

$5°$ 对于 X 的每一点 x 以及 X 中的每一个以 x 为极限点的收斂序列 $\{x_n\}$, 象序列 $\{f(x_n)\}$ 在 Y 中收斂到 $f(x)$.

証 明 首先我們証明 $1°\Rightarrow 2°\Rightarrow 3°\Rightarrow 4°\Rightarrow 1°$, 卽証明前四条件中的每两个都等价.

$1°\Rightarrow 2°$. 設 $f: X\to Y$ 是映射, 而且 B 是 Y 的任一开集. 我們要証 $f^{-1}(B)$ 是 X 的开集. $f^{-1}(B)$ 可能是空集, 因而是开集. 当 $f^{-1}(B)$ 非空时, 設 x_0 是它的任一点; 于是 $f(x_0)\in B$. 因为 B 是开集, 存在 $f(x_0)$ 的一个球形邻域 $V(f(x_0))\subset B$; 因为 f 是映射, 特别地在点 x_0 連續, 存在 x_0 的一个球形邻域 $U(x_0)$, 使得 $f(U(x_0))\subset V(f(x_0))\subset B$. 于是 $U(x_0)\subset f^{-1}(B)$. 因为 x_0 是 $f^{-1}(B)$ 的任一点, 故 $f^{-1}(B)$ 是 X 的开集.

$2°\Rightarrow 3°$. 根据 §1 中习題 4 的第二式. 然后 $2°\Leftrightarrow 3°$.

$3°\Rightarrow 4°$. 用反証法, 設 $3°$ 成立, 但 $4°$ 不成立. 因为 $4°$ 不成立, 存在 X 的一个子集 A 与 $\overline{A}$ 的一点 x_0, 使得 $f(x_0)\overline{\in}\overline{f(A)}$. 現

在命 $B=\overline{f(A)}$，它是 Y 的一个閉集．我們来証 $f^{-1}(B)$ 将不是閉集，因而与 3° 矛盾．事实上，一方面因为 $B=\overline{f(A)}\supset f(A)$，所以 $A\subset f^{-1}(B)$；因为 x_0 是 A 的聚点，所以它也是 $f^{-1}(B)$ 的聚点，因而有 $x_0\in\overline{f^{-1}(B)}$．另一方面，$f(x_0)\overline{\in}\overline{f(A)}=B$ 卽 $x_0\overline{\in}f^{-1}(B)$．这表明 $f^{-1}(B)$ 不是閉集，与 3° 矛盾．

4° ⇒ 1°．我們来証，如果 1° 不成立，则 4° 不成立．因为 1° 不成立，X 中存在一点 x_0，与 Y 中的点 $f(x_0)$ 的一个邻域 V，使得 x_0 的每一邻域中都存在一点（$\neq x_0$），其象不属于 V．然后 x_0 是集合 $A=f^{-1}(Y-V)$ 的聚点，因而有 $x_0\in\overline{A}$．另一方面，显然 $f(x_0)\overline{\in}Y-V=\overline{Y-V}$；因为 $ff^{-1}(Y-V)\subset Y-V$（§1 中习題 4 的第一式），$f(x_0)\overline{\in}\overline{f(A)}$．这就証明了 4° 不成立．

其次証明 1° ⇔ 5°；証法与数学分析課程中的相同．

1° ⇒ 5°．設 x 是 X 的一点，而且 X 中的序列 $\{x_n\}\to x$．因为 f 在点 x 处連續，对于 $f(x)$ 的任一邻域 V，存在 x 的一个邻域 U，其象 $f(U)$ 属于 V；根据收斂定义，对于 U，存在正整数 N，使得 $x_n\in U$，$n>N$．于是对于 V，存在 N，使得 $f(x_n)\in V$，$n>N$；这就証明了 5°．

5° ⇒ 1°．用反証法，設 f 在点 x 处不連續．然后对于 $f(x)$ 的某一邻域 V，不存在 x 的一个邻域 U，其象 $f(U)$ 属于 V，卽不論取怎样小的 $U_n=U(x,\delta_n)$，U_n 中总有一点 x_n，使得 $f(x_n)\overline{\in}V$．取实数序列 $\{\delta_n\}\to 0$．然后序列 $\{x_n\}\to x$，但 $\{f(x_n)\}\not\to f(x)$．这与 5° 矛盾．▌

3.3 定理 1° 度量空間 X 的恒同对应 $1: X\to X$ 是映射．2° 如果 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$ 是度量空間之間的映射，则 $gf: X\to Z$ 也是映射．▌

例 3.1 如果 X 是一个离散的度量空間（例 1.5），而且 Y 是任一度量空間，则任一对应 $f: X\to Y$ 是映射．

例 3.2 設 $X=(S, \rho)$是度量空間. 如果把距离函数 ρ 看作是从积空間 $X\times X$ 到 E^1 的实值函数,即 $\rho: X\times X\to E^1$,則它是連續函数.

証 明 如果 $x_0, y_0, x, y\in X$, 則

$$|\rho(x, y)-\rho(x_0, y_0)|\leqslant|\rho(x, y)-\rho(x_0, y)|+|\rho(x_0, y)-\rho(x_0, y_0)|;$$

根据三角形的二边的长度之差不大于第三边的长度(§1 中习题2),从而得到

$$|\rho(x, y)-\rho(x_0, y_0)|\leqslant\rho(x, x_0)+\rho(y, y_0).$$

用 ρ_1 表示积空間 $X\times X$ 的度量. 但根据 ρ_1 的定义,

$$\rho(x, x_0)\leqslant\rho_1((x, y), (x_0, y_0)), \quad \rho(y, y_0)\leqslant\rho_1((x, y), (x_0, y_0)).$$

如果給定了任一 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon/2$, 則

$$|\rho(x, y)-\rho(x_0, y_0)|<\varepsilon, \text{ 当 } \rho_1((x, y), (x_0, y_0))<\delta=\varepsilon/2. \blacksquare$$

在解析几何里我們所考虑的只限于一种极特殊的連續映射,即綫性映射; 而且,如所周知, 如果采用正交映射或非退化的綫性映射作为区别图形的标准, 則分别得到图形的欧几里得分类或仿射分类. 另一方面,一一对应是区别集合的标准;即一一对应的两个集合看作相同. 我們将用什么样的对应作为区别度量空間或更广泛的空間中的图形的标准呢?一般度量空間中已无直綫概念,因而已无从考虑采用綫性映射. 单从保持图形的維数的要求来看,一一对应或連續映射都不适宜; Cantor 的一个有名的例子就說明正方域(二維图形)的点与閉区間(一維图形)的点成一一对应, 而 Peano 曲綫的例子就說明正方域是閉区間的連續象. 这自然使人們容易想到試一試一一的、而又連續的映射. 这种想法,經过微小的修改之后, 得到成功, 对数学的发展起了巨大的影响(拓扑学的建立及其影响). 現在采用的不是一一的、連續的映射,而是下面定义的拓扑映射.

3.4 定义 設 X 与 Y 都是度量空間. 如果对应 $f: X\to Y$ 是从 X 到 Y 的、一一的、連續的满映射, 而且逆对应 $f^{-1}: Y\to X$ 也是連續的, 則 f 叫作**拓扑映射**或**同胚**. 如果存在拓扑映射 f, 則空間 X 与 Y 叫作**同胚的**,記作 $X\cong Y$. 度量空間的性质, 在每一拓

扑映射下保持不变的,叫作**拓扑性质.**

从定理 3.3 立刻可以証明: 度量空間的同胚关系是一个等价关系(即 1° $X\cong X$, 2° $X\cong Y\Rightarrow Y\cong X$, 3° $X\cong Y$ 与 $Y\cong Z\Rightarrow X\cong Z$).

从定理 3.2 立刻可以証明下面的事实. 設 f: $X\to Y$ 是从度量空間 X 到度量空間 Y 上的一一的、連續的映射, A 是 X 的任一子集,而且 $\{x_n\}$ 是 X 中的任一序列. 如果 A 是开集 $\Rightarrow f(A)$是开集,或 A 是閉集 $\Rightarrow f(A)$是閉集,或 $f(\overline{A})\supset\overline{f(A)}$, 或 $\{f(x_n)\}$ 收斂到点 $f(x_0)\Rightarrow\{x_n\}$ 收斂到点 x_0, 則 f 是拓扑映射.

从定理 3.2 还立刻可見: 开集,閉集, 子集的閉包与收斂序列都是拓扑性质.

例 3.3 下列每对 X, Y 同胚: 1° 圓周, 椭圓; 2° 圓周, 正方形的边界; 3° 圓的內部,平面 E^2. (复习題.)

例 3.4 設 $X=\{x\,|\,0\leqslant x<2\pi\}$, Y 是 E^2 中的单位圓周, 其点的极坐标是 $(1,\theta)$. 設 f: $X\to Y$ 把点 x 变成 $f(x)=(1,x)$. 易知 f 是一一的而且連續的滿映射,但非拓扑映射. 还易知, f 不把每一閉集变成閉集.

习　題

1. 設 f: $X\to E^n$ 是从度量空間 X 到欧几里得空間 E^n 的对应,而且 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$, $x\in X$. 試証: f 是映射 $\Leftrightarrow$ 每一个 f_i 是連續函数.

2. 設 φ: $E^1\to E^1$ 是从直綫到直綫的对应. 把第一个 E^1 当作 x_1 軸,把第二个 E^1 当作 x_2 軸, 并且作成 E^2 中的点集 $G=\{(x_1,\varphi(x_1))\}$. 然后用 $(x_1,\varphi(x_1))\to x_1$ 来定义对应 f: $G\to E^1$. 試証: f 是拓扑映射 $\Leftrightarrow\varphi$ 連續.

3. 試証: 下列每对度量空間同胚: 1° n 維球 S^n 与 n 維正方形, 2° n 維欧几里得空間 E^n 与减去一个点的 n 維球. (注意, S^2 是 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$.)

4. 設 $X=(S,\rho)$ 是度量空間, 而且 A 是 X 的一个已知子集. 試証: $f(x)=\rho(x,A)$ 在 X 上連續.

5. 試直接証明定理3.2中性质 $4^\circ \Leftrightarrow 5^\circ$，而不用該定理中的其他三性质。

4. 列紧性及其第一个特征(序列式列紧性)

数学分析中討論有界閉区間 $[a, b]$ 上的連續函数的一些性质时，用到两条基本定理：Bolzano-Weierstrass 定理与 Heine-Borel-Lebesgue 定理. 前者是說，閉区間 $[a, b]$ 中的任一无穷子集有一个聚点，属于 $[a, b]$；后者是說，$[a, b]$ 的任一开复盖(复盖的定义見后面定义 5.1)有一个有限的子复盖. 这两条定理所說的"一无穷子集有一个聚点"与"一复盖有一有限的子复盖"都是拓扑性质，即我們将定义的列紧性与紧致性，并且它們已足够决定 $[a, b]$ 上的連續函数的一些性质. 另一方面，在一般的度量空間中既无区間的概念，而且子集的有界性也不是拓扑性质. 因为我們要討論度量空間之間的映射，所以本节与下节专事討論度量空間的列紧性，以及列紧的度量空間上的映射.

本节中的主要結果是定理 4.4 后的表，定理 4.5 (列紧性的序列式特征)与 4.6.

4.1 定义 度量空間叫作**子集式列紧的**或**列紧的**，如果它的每一无穷子集有一个聚点. 度量空間的一子集 A 叫作列紧的，如果 A 作为子空間是列紧的.

注意，本定义中"无穷子集"可改为"可数的无穷子集"，因为明显地，每一无穷子集有一个聚点 ⇔ 每一可数的无穷子集有一聚点. 列紧这名称中的"列"，即表明"可数的无穷". 再者，子空間 A 列紧是說 A 的每一无穷子集有一个聚点 $\in A$. 最后，有限子集总是列紧的；故此后在証明某一子集 A 列紧时，只要考虑 A 是无穷的情

形,而常常把 A 是有限的情形省略不提.

例 4.1 数学分析中曾說明过直綫 E^1 上的閉区間$[a, b]$是列紧子集,而开区間(a, b)或半开区間$[a, b)$与$(a, b]$不是列紧子集.

4.2 定理 度量空間 X 的列紧子集 A 是 X 的有界閉集.

証 明 先来証明 A 有界. 如果 A 无界, 則 A 将有一子集 B, 其中每二点的距离>一个固定的正常数; 因而 B 无聚点(命題 2.5.2), 与 A 列紧矛盾.

現在来証明 A 是閉集, 或 $A\supset\overline{A}$ (参看命題 2.5.4 与定理 2.6 中的性质 2°). 設 $\overline{A}$ 中的点 a 是 A 的一个聚点. (若 A 无聚点, 則 A 已为閉集.) 从命題 2.7.2, $A-\{a\}$ 中存在一个由完全不同的点所組成的序列 $\{x_n\}$, 以 a 为极限点. 然后易見, A 的无穷子集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n$ 只有 a 为唯一的一个聚点; 于是 A 列紧 $\Rightarrow a\in A$. ▌

例 4.2 直綫 E^1 上的半开区間 $A=(0, 1]$ 作为子空間, 是一个度量空間. 但这度量空間 A 自身是一个有界閉集, 但不列紧.

4.3 定理 列紧度量空間 X 的閉子集 A 是 X 的列紧子集.

証 明 考虑任一无穷子集 $B\subset A$; 因而 $B\subset X$. X 列紧 $\Rightarrow B$ 有一个聚点 $b\in X$. 如果 B, A 在 X 中的閉包为 $\overline{B}$, $\overline{A}$, 則 $b\in\overline{B}\subset\overline{A}$. 但 A 是閉集, 或 $\overline{A}=A$, 因而 $b\in A$; 这就是說 A 列紧. ▌

例 4.3 E^n 中的 E^1 是閉集, 但不列紧.

4.4 定理 欧几里得空間 E^n 的子集 A 列紧 $\Leftrightarrow A$ 是 E^n 的有界閉集.

証 明 必要性是定理 4.2 的推論.

充分性的証明見数学分析中. 它利用了实数的性质, 即利用了 E^n 是欧几里得空間这假設. ▌

以上的定理与例子可总結为下表:

度量空間的子集：列紧 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 有界、閉，
列紧度量空間的子集：列紧 $\Leftarrow$ 閉；因而
列紧度量空間的子集：列紧 $\Leftrightarrow$ 閉.
欧几里得空間的子集：列紧 $\Leftrightarrow$ 有界，閉。

4.5 定理 度量空間 X 是列紧的 $\Leftrightarrow X$ 中的每一序列有一收斂的子序列.（这叫做 X 的**序列式列紧性**.）

証　明 必要性. 考虑 X 中的任一序列 $\{x_n\}$. 有两种可能：它有或沒有由完全相同的点所組成的一个子序列. 在前一情形下，这子序列当然收斂. 在后一情形下，$\{x_n\}$ 有由完全不同的点所組成的一个子序列 $\{y_n\}$. 由于 X 列紧，无穷子集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{y_n\}$ 有一聚点 a；因而，根据命題 2.7.3，序列 $\{x_n\}$ 有一子序列收斂到点 a；于是序列 $\{x_n\}$ 有一收斂的子序列.

充分性. 考虑 X 的任一无穷子集 A；作 A 的、由完全不同的点所組成的一个序列 $\{x_n\}$. 条件說，这序列有一子序列 $\{y_n\}$ 收斂到一点 $a\in X$. 根据命題 2.7.2 的充分部分，子集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{y_n\}$ 以 a 为聚点；于是 A 以 a 为聚点. ∎

定理 4.5 已給出度量空間的列紧性的一个特征. 在証明另一个特征（定理 5.3）之前，我們插入下面的定理 4.6，說明列紧度量空間与欧几里得空間有一个共同的性质，即它們都具有"可数的球形邻域族"性质. 定理 4.6 的証法对于定理 5.3 是有用的.

可数的球形邻域族的性质 存在一个可数的球形邻域族，使得任一开集是这族中的若干成員的并集.

注意，所謂"可数"，指的是"至多可数"，即"有限、或可数的

无穷".

欧几里得空間 E^n 的、以有理数为坐标的点形成一个可数的无穷点集;以这种点为球心的、以有理数为半徑的球形邻域形成一个可数的球形邻域族(参看命题 2.1.3).

4.6 定理　列紧度量空間具有可数的球形邻域族的性质.

在証明本定理之前,我們引进 ε-网的概念,并且証明一条引理.

4.7 定义　度量空間 X 的一个有限子集 A 叫做 X 的一个 ε-网,如果 X 的每一点到 A 的距离都 $<\varepsilon$.

4.8 引理　对于任一 $\varepsilon>0$, 列紧度量空間 X 有一个 ε-网.

証　明　用反証法,假設对于某一个 $\varepsilon>0$, X 无 ε-网. 任意取 X 的一点 a_1. 因为 $\{a_1\}$ 不能成为 X 的 ε-网, X 有一点 a_2,使 a_1 与 a_2 的距离 $\geqslant\varepsilon$. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $n>1$, 已取定,其中任二点的距离 $\geqslant\varepsilon$. 因为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 不能成为 X 的 ε-网, X 还有一点 a_{n+1}, 使得 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}$ 中任二点的距离 $\geqslant\varepsilon$. 这样地就得到一个无穷子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, 其中任二点的距离 $\geqslant\varepsilon$; 根据命题 2.5.2, 这无穷子集无聚点,矛盾于 X 列紧. ∎

例 4.4　半开区間$[0, 1)$有一个 ε-网, 对于任一 $\varepsilon>0$. 但它不是列紧的度量空間.

定理 4.6 的証明　根据引理, 对于每一 ε, 列紧度量空間 X 有一个 ε-网 N_ε. 命 $N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_{\frac{1}{n}}$; N 是 X 的一个可数子集. 以 N 的点为中心的、以有理数为半徑的球形邻域形成 X 的一个可数的球形邻域族 $\mathfrak{G}$. 現在我們要証明 X 的任一开集 G 是 $\mathfrak{G}$ 中若干成員的并集. 只需考虑 $G\neq X$ 这情形.

設 x 是 G 的任一点. 从命题 2.7.4, $d=\rho(x, X-G)>0$, 这里的 ρ 是 X 的度量. 然后 N 中有一点 a, 使得 $\rho(x, a)<\frac{1}{3}d$. 取

有理数 r, 使得 $\frac{1}{3}d<r<\frac{2}{3}d$. 于是有球形邻域 $U(a, r)$ 使得 $x\in U(a, r)\subset G$. ▌

从定理 4.6 的証明与稠密子集的定义 2.5, 我們立刻有

4.9 定理 如果度量空間有一个可数的稠密子集，則它具有可数的球形邻域族的性質.

包含一个可数的稠密子集的度量空間也叫作**可分的度量空間.**

例 4.5 Hilbert 空間 E^ω 具有可数的球形邻域族的性質.

証 明 把 E^n 的点 $(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ 看作是 E^ω 中的点 $(x_1, x_2,\cdots, x_n, 0, 0, 0,\cdots)$, 然后 $E^n\subset E^\omega$. 命

$$A=\{E^n \text{ 的有理点} \mid n=1, 2, \cdots\};$$

A 是 E^ω 的一个可数的子集. 設 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$ 是 E^ω 的任一点. 对于任一正数 ε, 取一个充分大的正整数 n, 使得

$$\sum_{k>n} x_k^2<\varepsilon^2,$$

再取 E^n 中的一个有理点 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ 使得 $|x_i-x_i'|<\frac{\varepsilon}{n}$ 对于 $1\leqslant i\leqslant n$. 命 $x'=(x_1', x_2', \cdots, x_n', 0, 0, 0, \cdots)$. 然后 $\rho(x, x')<2\varepsilon$, 因而 $\rho(x, A)=0$; 这就証明了 A 是 E^ω 中的稠密子集. 然后应用定理 4.9. ▌

习 題

1. 設 X 是度量空間, 以 ρ 为距离函数, 而且 A 与 B 是 X 的两个非空的、不相交的列紧子集. 試証: A 中有一点 a, B 中有一点 b, 使得

$$\rho(A, B)=\rho(a, b)>0.$$

討論下列两种情形: 1° A 是列紧子集, B 是閉集; 2° A 与 B 都是閉集.

2. 試証: Hilbert 空間 E^ω 的基本方体 J^ω 是 E^ω 的列紧子集.

3. 試証: $E^\omega-\bar{J}^\omega$ 在 E^ω 中稠密.

4. 試証: 可分的度量空間的任一子空間还是可分的.

5. 列紧性的第二个特征(紧致性)·列紧度量空間上的映射

定理 4.5 已給出列紧度量空間的一个特征，而本节将給出另一个特征(定理 5.3)，以及有关的复盖概念与一些重要定理.

5.1 定义 設 A 是度量空間 X 的一个子集. 如果 $\mathfrak{G}=\{G_\alpha\}$ 是 X 的一族开集，使得 $A\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$，則 $\mathfrak{G}$ 叫做 A 的、在 X 中的一个**开复盖**(同样地可定义閉复盖). 按照 $\mathfrak{G}$ 中成員的个数是有限的或可数无穷的，$\mathfrak{G}$ 就分别叫做**有限的**或**可数无穷的复盖**. 如果 A 的、在 X 中的复盖 $\mathfrak{G}$ 的一个子族也是 A 的、在 X 中的一个复盖，它就叫做 $\mathfrak{G}$ 的一个**子复盖**. 如果 $A=X$，則我們只說 A 的复盖，不必說 A 的、在 A 中的复盖.

5.2 定理 設 X 是一个列紧度量空間，而且有一个开复盖 $\mathfrak{G}=\{G_\alpha\}$. 則存在一个正数 $\lambda=\lambda(\mathfrak{G})$ 具有下述性质：如果 X 的任一子集 A 的直徑 $<\lambda$，則 $A\subset$ 至少一个 G_α. $\lambda(\mathfrak{G})$ 叫做复盖 $\mathfrak{G}$ 的一个 **Lebesgue 数**.

証 明 用反証法，假設結論不成立. 然后对于每一自然数 n，存在 X 的一个子集 A_n，它的直徑 $<1/n$，而它 $\not\subset\mathfrak{G}$ 的任一个成員. 在每一个 A_n 中任取一点 a_n，作成 X 的一个序列 $\{a_n\}$. 因为 X 列紧，从定理 4.5，序列 $\{a_n\}$ 有一个子序列 $\{a_{n_i}\}$，收斂到 X 的一点 a. 因为 $\mathfrak{G}$ 是 X 的开复盖，$\mathfrak{G}$ 的一个成員 G 包含点 a. 因为 G 是开集，点 a 到 $X-G$ 的距离 $d=\rho(a,\ X-G)>0$ (命題 2.7.4)，这里的 ρ 是 X 的度量. 現在再取定一个整数 m 使得它具有下述两个性质：第一，$m>\dfrac{2}{d}$；第二，点 $a_m\in$ 子序列 $\{a_{n_i}\}$ 而且 $\rho(a,\ a_m)<\dfrac{d}{2}$. 然后，对于 A_m 的任一点 $x\left(注意，A_m 的直徑<\dfrac{1}{m}\right)$，有

$$\rho(a, x)\leqslant\rho(a, a_m)+\rho(a_m, x)<\frac{d}{2}+\frac{1}{m}<d;$$

因而 $A_m\subset G$; 这是矛盾. ▌(说明能假设 $G\neq X$ 的理由.)

5.3 定理 度量空间 X 列紧 $\Leftrightarrow X$ 的每一个开复盖 $\mathfrak{G}$ 有一个有限的子复盖(这叫作 X 的**紧致性**).

证 明 必要性,即 Heine-Borel-Lebesgue 定理. 设 λ 是复盖 $\mathfrak{G}$ 的 Lebesgue 数. 从引理 4.8, X 有 $\frac{\lambda}{3}$-网 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$; 因而

$$X\subset\bigcup_{i=1}^{k}U\left(a_i, \frac{\lambda}{3}\right),$$

这里的 $U(a_i, \lambda/3)$ 是球形邻域, 它的直径 $<\lambda$. 从定理 5.2, 每一个 $U(a_i, \lambda/3)\subset$ 某一个 $G_i\in\mathfrak{G}$, $i=1, 2, \cdots, k$. $\{G_1, G_2, \cdots, G_k\}$ 就是所求的子复盖.

充分性. 设条件已满足. 用反证法,假设 X 不列紧,即 X 有不具聚点的无穷子集 A. 因为无聚点的集 A 是闭集, $X-A$ 是开集;而且,因为 A 的每一点 a 都不是 A 的聚点,点 a 有一个球形邻域 $U(a)$,使得 $U(a)\cap(A-\{a\})=\emptyset$. 于是 $\{X-A, U(a)\ a\in A\}$ 是 X 的一个开复盖,但明显地无有限的子复盖;这是矛盾. ▌

根据 de Morgan 公式,从定理 5.2 与 5.3 分别得下列两定理.

5.2a 定理 设 X 是一个列紧度量空间,而且 $\mathfrak{F}=\{F_\alpha\}$ 是 X 的一族闭集,其成员的交 $\bigcap_\alpha F_\alpha=\emptyset$. 则存在一个正数 $\lambda=\lambda(\mathfrak{F})$, 具有下述性质: X 的任一子集 A 必与 $\mathfrak{F}$ 的至少一个成员不相交, 如果 A 的直径 $<\lambda$. ▌

5.3a 定理 度量空间 X 列紧 $\Leftrightarrow$ 如果 $\mathfrak{F}=\{F_\alpha\}$ 是 X 的任一族闭集,其成员的交 $\bigcap_\alpha F_\alpha=\emptyset$, 则 $\mathfrak{F}$ 有一个非空的有限子族, 其所有成员的交 $=\emptyset$. ▌

注意,这两定理中的 $\mathfrak{F}$ 都不必是 X 的闭复盖.

以下讨论列紧度量空间中的映射(连续映射的简称).

5.4 定理 如果$f:X\to Y$是从列紧度量空间X到度量空间Y的映射,则$f(X)$是Y的列紧子集.

这就是说,度量空间的列紧性不仅是拓扑性质,还是在映射下的不变性质.

证 明 作为Y的子空间,$f(X)$是一个度量空间. 容易看出,$f:X\to f(X)$也是映射. 设$\mathfrak{V}=\{V_\alpha\}$是$f(X)$的任一开复盖. 根据定理2.4,$f^{-1}(V_\alpha)$是$X$的开集. $\mathfrak{U}=\{f^{-1}(V_\alpha)\}$显然是$X$的一个开复盖. 因为$X$列紧,$\mathfrak{U}$有一个有限的子复盖

$$\{f^{-1}(V_{\alpha_1}),\ f^{-1}(V_{\alpha_2}),\ \cdots,\ f^{-1}(V_{\alpha_n})\}.$$

因为$ff^{-1}(V_\alpha)=V_\alpha$,$\{V_{\alpha_1},\ V_{\alpha_2},\ \cdots,\ V_{\alpha_n}\}$是$f(X)$的一个有限复盖,而且是$\mathfrak{V}$的一个子复盖. ▌

5.5 推论 列紧度量空间X中的任一连续函数是有界的,而且能在X的点处达到它的最大值与最小值.

证 明 设连续函数是$f:X\to E^1$. 根据定理5.4与4.4,$f(X)$是E^1上的有界闭集;它当然包含它的上确界与下确界. ▌

5.6 推论 如果$f:X\to Y$是从列紧度量空间X到度量空间Y的映射,则f是**闭映射**,即f把每一闭集变成闭集.

证 明 设A是X的任一闭子集. 根据定理4.3, 5.4与4.2,分别有A是X的列紧子集,$f(A)$是Y的列紧子集,与$f(A)$是Y的闭子集. ▌

5.7 定理 如果$f:X\to Y$是从列紧度量空间X到度量空间Y的一一的满映射,则f是拓扑映射.

证 明 由于$f(X)=Y$与f是一一的满映射,有逆对应$f^{-1}:Y\to X$. 我们用定理3.2中的$3^\circ\Rightarrow 1^\circ$来证$f^{-1}$是映射如下. 设$A$是$X$的任一闭子集. A在f^{-1}下的原象就是$f(A)$,所以根据推论5.6,是Y的闭子集. ▌ 参看例3.4.

5.8 定理 如果 $f: X \to Y$ 是从列紧度量空间 X 到度量空间 Y 的映射，则 f 是一致连续映射．换句话说，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个数 $\lambda>0$，使得 $\rho(x', x'')<\lambda \Rightarrow \rho(f(x'), f(x''))<\varepsilon$.

证 明 设已知 $\varepsilon>0$．因为 f 是映射，对于 X 的每一点 x，能决定数 $\delta(x)>0$，使得 $x' \in U(x, \delta(x)) \Rightarrow \rho(f(x), f(x'))<\frac{\varepsilon}{2}$．根据定理 5.2，$X$ 的开复盖 $\{U(x, \delta(x))\}$ 有一个 Lebesgue 数 λ．如果 x' 与 x'' 之间的距离小于 λ，则存在一点 $x \in X$，使得 $U(x, \delta(x))$ 包含 x' 与 x''．于是

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant \rho(f(x'), f(x)) + \rho(f(x), f(x'')) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \rule{0.5em}{0.8em}$$

例 一个映射空间．设 X 与 Y 都是度量空间．用 S 表示从 X 到 Y 的所有映射的集合．如果 X 与 Y 都是欧几里得空间的列紧子空间，并且对于任意两映射 $f, g \in S$，定义

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

这里的 d 是欧几里得空间中的距离，则 (S, ρ) 是一个度量空间．（复习题．）

习 题

1．设定理 5.2a 中的空间 X 是平面中的三角形（平面中的闭区域），而且 $\mathfrak{F}$ 的成员是这三角形的三个边（闭线段）．试求该定理中所说的一个正数 $\lambda=\lambda(\mathfrak{F})$.

2．书中是用定理 5.3 来证明定理 5.4 的．试用定理 4.5 来证明．

3．设空间 X 与闭集族 $\mathfrak{F}$ 同定理 5.2a 中．试证：存在一个正数 $\mu=\mu(\mathfrak{F})$，使得 X 的任一点 x 与 $\mathfrak{F}$ 的至少一个成员之间的距离 $\geqslant \mu$.

4．设 $\mathfrak{F}=\{F_1, F_2, \cdots, F_k\}$ 是列紧度量空间 X 的一族有限个闭集．试证：存在一个正数 $\sigma=\sigma(\mathfrak{F})$ 具有下述性质：如果 X 的一子集 A 具有直径 $<\sigma$，而且交 $\mathfrak{F}$ 中的成员 $F_{i_1}, F_{i_2}, \cdots, F_{i_h}$，则

$$F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_h} \neq \emptyset.$$

第二章 拓扑空間

本章将介紹的是拓扑空間的、以及从拓扑空間到拓扑空間的連續映射的一些基本概念与性质. 度量空間的知識对于本章的功用,如同欧几里得空間的知識对于前章的功用.

本章定义 1.1 中所定义的拓扑空間是极其广泛的. 随后将逐步地加以限制, 形成各种阶层的拓扑空間, 其中包括度量空間与列紧度量空間, 以适应各种数学問題的要求. 在这些空間之中, 列紧度量空間占有重要的特殊地位; 理由是它的性质我們知道的比較詳尽而且比較容易証明. 所以本章中的綫索之一是辨别度量空間或列紧度量空間的性质与其他較广的拓扑空間的性质的异同.

1. 拓扑空間・拓扑基

欧几里得空間的点能用实数刻划. 度量空間的点虽已不必受此限制, 但度量空間的球形邻域仍旧是通过距离函数用实数刻划的. 現在我們要抛弃距离概念,参照度量空間的开集的性质(定理 I.2.3),直接引进"开集"来定义拓扑空間.

1.1 定义 設 S 是一个集合,而且 τ 是 S 的一个子集族,其中成員叫作 S 的开集(而且只把 τ 的成員叫作开集. 这里的开集是公理方法中所謂未定义的名詞). 如果 τ 滿足下列三个公理,它就叫作**集合 S 的一个拓扑**:

1° S 与空集 $\emptyset$ 是开集；

2° 两个开集的交集是一个开集；

3° 任意多个开集的幷集是一个开集.

集合 S 与它的一个拓扑 τ 在一起，叫作一个**拓扑空間**，記作 (S, τ).

S 的点、子集、开集与拓扑 τ 分别叫作空間 (S, τ) 的点、子集、开集与拓扑.

例 1.1 如果把度量空間 (S, ρ) 的开集全体記作 τ，根据定題 I.2.3，τ 是 S 的一个拓扑，因而是拓扑空間 (S, τ) 的拓扑. τ 叫作度量 ρ 所誘导出的拓扑. 我們說度量空間 (S, ρ) 是一个拓扑空間，指的就是 (S, τ).

如果給定了拓扑空間 (S, τ)，而且存在 S 上的一个度量 ρ，使得 τ 就是 ρ 所誘导出的、度量空間 (S, ρ) 的开集全体，我們就說拓扑空間 (S, τ) 是**能度量化的**. 拓扑空間的能否度量化的問題是一个重要問題. §§ 6～7 还要回到这問題。

例 1.2 对于任一非空集合 S，有两个最极端的拓扑. 第一，τ 由 S 与空集这两个子集組成；开集个数最少，叫作**平庸的**拓扑. 第二，τ 是 S 的全体子集組成；开集最多，叫作**离散的**拓扑.

如果平庸的拓扑空間包含不只一个点，它就是不能度量化的；因为它的一个点不形成一个閉集，而度量空間的一个点則不然(例 I.2.2).

离散的拓扑空間是能度量化的；例如命 $\rho(x, y)=0$，当 $x=y$，而 $\rho(x,y)=1$，当 $x\neq y$. 参看例 I.1.5.

对于度量空間，我們从它的球形邻域出发得到它的开集；而且它的球形邻域全体形成它的开集族的一个子族. 現在拓扑空間是用一个拓扑或一个开集族定义的，是否也可以从拓扑的一个子族出发，得到这拓扑呢？拓扑的这样的子族就是下面仿照定理 I.1.3 而定义的拓扑基.

1.2 定义 集合 S 的一个子集族 $\mathfrak{B}=\{B_\alpha\}$ 叫作 S 的**一个拓扑基**，如果它具有下列二性质：

1° S 的每一点 $\in\mathfrak{B}$ 的(至少)一个成員,即 $\bigcup\limits_{\alpha}B_\alpha=S$;

2° 如果 S 的点 $x\in\mathfrak{B}$ 的两个成員 B_α 与 B_β 的交集 $B_\alpha\cap B_\beta$,则存在 $\mathfrak{B}$ 的(至少)一个成員 B_γ,使得 $x\in B_\gamma\subset B_\alpha\cap B_\beta$.

度量空間 $(S,\ \rho)$ 的球形邻域全体或以有理数为半徑的球形邻域全体,都各形成 S 的一个拓扑基;而且它們都不是 S 的拓扑.

1.2.1 命題 拓扑空間 $(S,\ \tau)$ 的拓扑或开集族 τ 是 S 的一个拓扑基.(复习題.)】

例 1.3 設 $S=\{a,\ b,\ c\}$,包含三个不同的点 $a,\ b,\ c$.下列四个子集:

$$S,\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \emptyset$$

不形成 S 的一个拓扑基,因为它們所形成的子集族不具有性质 2°.当然它們也不形成 S 的一个拓扑.

但下列五个子集:

$$S,\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{a\},\ \emptyset$$

形成 S 的一个拓扑.

1.3 定义 設 S 是一个集合,而且 $\mathfrak{B}=\{B_\alpha\}$ 是 S 的一个拓扑基.S 的一个子集 A,叫作**对于 $\mathfrak{B}$ 而言的开集**,如果对于 A 的每一点 x,存在 $\mathfrak{B}$ 的一个成員 B,使得 $x\in B\subset A$.

如同从度量空間中的开集定义 I.2.1 得到命題 I.2.1.1,現在从定义 1.3 得到下面的命題.

1.3.1 命題 A 是对于 $\mathfrak{B}$ 而言的开集 $\Leftrightarrow A$ 是 $\mathfrak{B}$ 的若干成員的并集.】

1.4 定理 如果 $\mathfrak{B}=\{B_\alpha\}$ 是集合 S 的一个拓扑基,则由所有的对于 $\mathfrak{B}$ 而言的开集所形成的子集族 τ 是 S 的一个拓扑,而且 $\mathfrak{B}\subset\tau$.特别地,如果 $\mathfrak{B}$ 是一个拓扑,则 $\mathfrak{B}=\tau$.

这时候,这拓扑 τ 叫作**由拓扑基 $\mathfrak{B}$ 誘导出的拓扑**,而且拓扑基 $\mathfrak{B}$ 也叫作这**拓扑空間 $(S,\ \tau)$ 的一个拓扑基**.然后这定理就是說:拓扑空間 $(S,\ \tau)$ 的拓扑 τ 是这空間的最大拓扑基.



証　明　因为拓扑基 $\mathfrak{B}$ 的性质 1° 以及空集 $\emptyset$ 是 $\mathfrak{B}$ 的零个成員的并集，根据命题 1.3.1，τ 具有拓扑的性质 1°；因为 $\mathfrak{B}$ 的若干成員的若干并集的并集是 $\mathfrak{B}$ 的若干成員的一个并集，根据命题 1.3.1，τ 具有拓扑的性质 3°.

現在来証明 τ 具有拓扑的性质 2°，即 τ 的每两个成員 U_1 与 U_2 的交集 $U_1\cap U_2$ 是 τ 的一个成員．設 x 是 $U_1\cap U_2$ 的任一点；則根据对于 $\mathfrak{B}$ 而言的开集的定义 1.3，存在 $\mathfrak{B}$ 的成員 B_i，使得 $x\in B_i\subset U_i$，$i=1, 2$；而且根据 $\mathfrak{B}$ 的性质 2°，存在 $\mathfrak{B}$ 的一个成員 B，使得

$$x\in B\subset B_1\cap B_2\subset U_1\cap U_2,$$

即 $U_1\cap U_2$ 还是 τ 的一个成員，τ 具有拓扑的性质 2°．于是 τ 是集合 S 的一个拓扑．

显然 $\mathfrak{B}\subset\tau$.

特别地，当 $\mathfrak{B}$ 也是集合 S 的一个拓扑时，从拓扑的性质 3° 与命题 1.3.1 就得到 $\mathfrak{B}=\tau$. ▌

这里的末一个結論的另一个説法是：如果把集合 S 的一个拓扑 τ 看作是 S 的一个拓扑基，則在定义 1.3 的意义下，τ 就是对于拓扑基 τ 而言的开集族．这説明在定义 1.1 中为什么我們把拓扑 τ 的成員叫作开集.

一个集合可能有許多不同的拓扑基．例如欧几里得空間 E^n 的点集 R^n 在例 I.1.1 与例 I.1.2 中就有三个不同的度量 d, d_1, d_2，它們所决定的球形邻域族就是 R^n 的三个不同的拓扑基．为着判断一个集合的两个不同的拓扑基是否誘导出相同的拓扑，我們給出下面的定义与定理.

1.5 定义　一个集合的两个拓扑基是**等价的**，如果它們誘导出这集合的同一个拓扑．一个集合的两个度量是**拓扑等价的**，如

果它們所决定的球形邻域所組成的两个拓扑基是等价的.

1.6 定理 一集合 S 的两个拓扑基 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{B}'$ 等价 $\Leftrightarrow$ 拓扑基 $\mathfrak{B}$ 的每一个成員是对于拓扑基 $\mathfrak{B}'$ 而言的开集，而且拓扑基 $\mathfrak{B}'$ 的每一个成員是对于拓扑基 $\mathfrak{B}$ 而言的开集.

証 明 充分性. 設 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{B}'$ 分别誘导出拓扑 τ 与 τ'. 从拓扑基誘导出拓扑的定义与命題 1.3.1, τ' 的每一个成員是 $\mathfrak{B}'$ 的若干成員的幷集；从假設与命題 1.3.1, $\mathfrak{B}'$ 的每一个成員是 $\mathfrak{B}$ 的若干成員的幷集；因而 $\tau'\subset\tau$. 同理, $\tau\subset\tau'$. 于是 $\tau=\tau'$.

必要性. 設 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{B}'$ 誘导出同一个拓扑 τ. 根据定理 1.4, $\mathfrak{B}\subset\tau$, $\mathfrak{B}'\subset\tau$. 然后从拓扑基誘导出拓扑的定义与命題 1.3.1 得到結論. ▐

例 1.4 例 I.1.1 与例 I.1.2 中的三种度量都拓扑等价，它們給出的都是欧几里得空間的通常拓扑.

例 1.5 例 I.1.6 中的度量 ρ_1, ρ_2 都与 ρ 拓扑等价. (复习題.)

如果度量空間 X 的直徑 $<$ 一常数，則 X 的度量叫作**有界的度量**.

习　題

設 $\tau=\{U_\alpha\}$ 与 $\tau'=\{U'_\beta\}$ 是集合 S 上的两个拓扑. 根据幷集与交集的定义,

$$\tau\cup\tau'=\{U_\alpha, U'_\beta\},$$
$$\tau\cap\tau'=\{V_\gamma | V_\gamma\in\tau, V_\gamma\in\tau'\},$$
$$\tau\subset\tau', \text{当每一个 } U_\alpha\in\tau'.$$

在 $\tau\subset\tau'$ 时，我們說拓扑 τ 小于拓扑 τ'，或拓扑 τ' 大于拓扑 τ.

1. 試証：集合 S 上的任意多个拓扑 τ_α 的交集 $\tau=\bigcap\limits_{\alpha}\tau_\alpha$ 还是 S 上的一个拓扑，而且 τ 是 S 上的小于每个拓扑 τ_α 的、唯一的最大拓扑.

2. 設集合 S 恰包含三个点. 試作出 S 上的两个拓扑，使得它們的幷集

不是 S 上的拓扑.

3. 設集合 S 上有任意多个拓扑 τ_α. 試作出 S 上的一个拓扑 $\tau\supset\bigcup_\alpha\tau_\alpha$. 这拓扑 τ 是否 S 上的、大于每个拓扑 τ_α 的、唯一的最小拓扑?

2. 拓扑空間的基本概念与性质

本节标题中所說的基本概念与性质，是上节中还沒有介紹过的、I §§ 1～3 中的基本概念(除开集外)与性质在拓扑空間中的推广.

拓扑空間的开集实质上是度量空間的开集定义 I.2 1的推广. 为着使即将引进的其他推广易于描写，我們先引进邻域这一名称.

2.1 定义 拓扑空間的任一开集叫作它的每一点的一个**邻域**,也叫作它的每一子集的一个邻域.

在前一章中，度量空間的一个球形邻域只是唯一的一点(球心)的一个球形邻域,而且一个开集并未說成是邻域. 当把度量空間看作是拓扑空間时,度量空間的一球形邻域或一开集,根据定义 2.1,是它的任一点或任一子集的一个邻域.

拓扑空間中**子集的內点、內部**,**閉集**,**子集的聚点、閉包**,**收斂序列的极限点**,**連續映射**,**拓扑映射**、**拓扑性质**等概念的定义,都可以仿照度量空間中同名概念的定义得到. 具体地說，如果把度量空間中的一个概念的定义中的“度量空間”改为“拓扑空間”，同时把“球形邻域”改为“邻域”，就得到现在的拓扑空間中同名概念的定义. 此后我們都是在这个意义下用“仿照”与“相仿”这两个詞語.

子空間、积空間的定义我們重复提出. 設 A 是拓扑空間 $X=(S,\tau)$ 的子集. 則**子空間** A 定义为具有拓扑 $\tau\cap A$，这里的

$\tau \cap A=\{U_\alpha \cap A\}$，当 $\tau=\{U_\alpha\}$. 設 X 与 Y 是拓扑空間，分別以 S 与 T 为点集，以 $\{U_\alpha\}$ 与 $\{V_\beta\}$ 为拓扑基. 則积空間 $X\times Y$ 定义为以 $S\times T$ 为点集，以 $\{U_\alpha\times V_\beta\}$ 为拓扑基.

以上都是关于定义. 如果仿照定理 I.2.4, I.2.6, I.3.2 的一部分, I.3.3 及其証明，我們有下列定理.

2.2 定理 拓扑空間 X 的閉集具有下列三性质：

1° X 与空集 $\emptyset$ 是閉集；

2° 两个閉集的并集是閉集；

3° 任意多个閉集的交集是閉集. ▌

2.3 定理 拓扑空間的子集与它們的閉包具有下列四个性质：

1° $\bar{\emptyset}=\emptyset$；

2° $A\subset\bar{A}$；

3° $\bar{\bar{A}}\subset\bar{A}$；

4° $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$. ▌

2.4 定理 設 X 与 Y 都是拓扑空間. 对于对应 $f: X\to Y$，下列四条件中的每两个都等价：

1° f 是映射；

2° Y 的每一开集的在 f 下的原象都是 X 的开集；

3° Y 的每一閉集的在 f 下的原象都是 X 的閉集；

4° 对于 X 的每一子集 A, $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$.

再者，f 連續 ⇒ 对于 X 的每一点 x 以及 X 中的每一个以 x 为极限点的收斂序列 $\{x_n\}$，象序列 $\{f(x_n)\}$ 在 Y 中收斂到 $f(x)$. ▌

注意本定理与定理 I.3.2 的不同处；参看例 4.3 与定理 4.8.

2.5 定理 1° 拓扑空間 X 的恒同对应是映射. 2° 如果 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$ 是拓扑空間之間的映射，則 $gf: X\to Z$ 也是

映射. ▌

在結束本节之前,我們要指出:虽然拓扑空間是用开集族 τ 定义的,但同样地可以用閉集族,或子集与它的閉包之間的对应 $(A\to\overline{A})$ 来定义.

2.6 定理 設 S 是一个集合,而且 σ 是 S 的一个子集族,具有定理 2.2 中的三个性质. 則存在 S 的唯一的一个拓扑 τ,使得拓扑空間 $(S,\ \tau)$ 的閉集族就是 σ.

証 明 命 $\tau=\{S-F\,|\,F\in\sigma\}$. 从 de Morgan 公式及 σ 的三个性质, τ 是 S 的一个拓扑. 既然 τ 是 $(S,\ \tau)$ 的开集族,而且 σ 的每一个成員是 τ 的一个成員在 X 中的余集,所以 σ 是拓扑空間 $(S,\ \tau)$ 的所有閉集組成的閉集族. 再者,为着要使 σ 是又一个拓扑空間 $(S,\ \tau')$ 的所有閉集所組成的閉集族,必須 $\tau'=\tau$. ▌

从本定理可知,如果把本定理假設中的 σ 叫作 S 的一个閉集族,則可以把 S 与 σ 叫作一个拓扑空間,記作 $(S,\ \sigma)$,作为拓扑空間理論的出发点.

2.7 定理 設 S 是一个集合,而且給定了 S 的子集之間的一个对应 $h^*:\ A\to A^*$, 具有定理 2.3 中的四个性质 ($1°\ \emptyset^*=\emptyset$, $2°\ A\subset A^*$, $3°\ A^{**}\subset A^*$, $4°\ (A\cup B)^*=A^*\cup B^*$). 則存在 S 的唯一的一个拓扑 τ,使得拓扑空間 $(S,\ \tau)$ 的子集 A 与它的閉包之間的对应 $h:\ A\to\overline{A}$ 就是給定的对应 $h^*:\ A\to A^*$.

証 明 取 S 的子集族 $\sigma=\{F\,|\,F=F^*\}$. 我們先証明这个子集族 σ 具有定理 2.2 中的三个性质.

对应 h^* 的性质 $1°$, 蘊涵空集 $\emptyset\in\sigma$. h^* 的性质 $2°$ 蘊涵 $S\subset S^*$; 又因为 $S^*\subset S$, 所以 $S\in\sigma$. 这就証明了子集族 σ 具有定理 2.2 中的性质 $1°$.

从对应 h^* 的性质 $4°$ 与 σ 的定义,子集族 σ 具有定理 2.2 中

的性质 2°.

現在来証明子集族 σ 具有定理 2.2 中的性质 3°. 設 $F_\alpha\in\sigma$, 卽 $F_\alpha=F_\alpha^*$. 对于每一 α, 純从集合考虑, 显然有 $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha\subset F_\alpha$. 因为 h^* 的性质 4° (h^* 的性质 4° 給出: 如果 $A\subset B$, 則 $A^*\subset B^*$) 以及 $F_\alpha\in\sigma$, 所以 $(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha)^*\subset F_\alpha^*=F_\alpha$. 从而, 純从集合考虑, 显然有 $(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha)^*\subset\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$. 这結果与 h^* 的性质 2° 于是給出 $(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha)^*=\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$, 卽 σ 具有定理 2.2 中的性质 3°.

根据定理 2.6, 存在 S 的唯一的一个拓扑 τ, 使得拓扑空間 (S, τ) 的閉集族恰是 σ. 命 (S, τ) 的子集与它的閉包之間的对应为 h: $A\to\overline{A}$. 然后 h 也具有定理 2.3 中的四个性质. 現在来証明 $h=h^*$, 卽对于 S 的任一子集 A, 都有 $\overline{A}=A^*$.

設 A 是 S 的任意給定的一个子集. 因为对应 h^* 的性质 2°, 有 $A\subset A^*$; 根据 h 的性质 4° 推出 $\overline{A}\subset\overline{(A^*)}$; 然后根据拓扑 τ 的取法, A^* 是 (S, τ) 中的閉集, 卽 $\overline{(A^*)}=A^*$; 于是 $\overline{A}\subset A^*$. 同样地, 因为 h 的性质 2°, 有 $A\subset\overline{A}$; 根据 h^* 的性质 4° 推出 $A^*\subset(\overline{A})^*$; 然后因为 $\overline{A}$ 是 (S, τ) 中的閉集, 根据拓扑 τ 的取法, $\overline{A}\in\sigma$, 卽 $(\overline{A})^*=\overline{A}$; 于是 $A^*\subset\overline{A}$. 所以 $\overline{A}=A^*$, 对于 S 的任一子集 A. ▌

本定理說明, 我們也可用本定理的假設中的对应 h^* 作为拓扑空間理論的出发点.

习　题

1. 設 A 是拓扑空间 X 的子空间. 试证: 如 A 是 X 的开(閉)子集, 則 A 的一个开(閉)子集也是 X 的一个开(閉)子集.

2. 設 A 是拓扑空間 X 的子集. 試証:

1° $\operatorname{Int}(X-A)=X-\overline{A}$;

2° $\overline{X-A}=X-\operatorname{Int}A$.

3. 設 A 与 B 是拓扑空間 X 的子集. 試只用定理 2.3 中閉包的四个性

质，証明：

1° $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$;

2° $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$;

3° $A\supset B\Rightarrow\overline{A}-\overline{B}\subset\overline{A-B}$.

4. 設 $\{F_i\}$ 是拓扑空間 X 的一个有限閉复盖，而且 $f_i: F_i\to Y$ 是从 F_i 到拓扑空間 Y 的映射，使得 $f_i|(F_i\cap F_j)=f_j|(F_i\cap F_j)$，对于每一对 i 与 j. 定义一个对应 $f: X\to Y$，使得 $f|F_i=f_i$. 試証 f 是一个映射.

3. 可数性公理·分离性公理

前两节着重在把关于度量空間的概念与性质推广到一般的(指的是不加任何限制的)拓扑空間. 因为着重在推广，所以着重在介紹这两种空間的相同的概念与性质. 但是同时，从例 1.2 中的两个极端的拓扑空間(平庸的拓扑空間与离散的拓扑空間)，以及从定理 2.4 与定理 I.3.2 的差异，已可以料到一般的拓扑空間的性质远不同于度量空間的性质.

一般的拓扑空間与度量空間或列紧度量空間之間的差距是很大的. 本节的目的就是要在它們之間引进一系列的拓扑空間作为中間站；通过对一般的拓扑空間逐步地加以限制，以建立这些中間站. 本节基本上只是把它們列出，至于对它們的性质进行較深入的討論，要留待以后的 §§ 4～7.

施加于拓扑空間 X 的第一种限制是关于 X 的拓扑基的两个公理. 其中較强的而且較簡单的一个是

公理 A_2（第二可数性公理或可数基公理） 存在一个可数的拓扑基.

I § 4 中所說的具有可数的球形邻域族的性质的度量空間，就是满足公理 A_2 的度量空間.

在引进另一个公理之前，我們需要下面的定义.

一个拓扑基形成一个拓扑,不一定要所有的开集才能形成拓扑.

3.1 定义 拓扑空間的一点 x 的一个邻域族 $\mathfrak{U}$ 叫作**点 x 处的一个拓扑基**,如果对于包含点 x 的任一开集 G,都存在 $\mathfrak{U}$ 的一个成員 U, 使得 $x \in U \subset G$.

公理 A_1(第一可数性公理) 对于每一点 x, 存在 x 处的一个可数的拓扑基.

显然,如果拓扑空間 X 满足公理 A_2,它也满足公理 A_1; 卽公理 A_2 的限制比公理 A_1 强.

欧几里得空間、列紧度量空間(定理 I.4.6)与有限(指的是点集有限)的拓扑空間都具有可数基,卽满足公理 A_2; 度量空間都满足公理 A_1.

例 3.1 满足公理 A_1 而不满足公理 A_2 的度量空間的例子.

取实数集合 R^1, 而且取 R^1 的离散的拓扑, 卽每一子集是开集因而也是閉集. 这是一个能度量化的空間(例1.2). 这拓扑空間的任一拓扑基必須包含所有的独点集(命题 1.3.1),因而不可数. 同时,独点集 $\{x\}$ 显然形成点 x 处的一个可数的拓扑基.

例 3.2 不满足公理 A_1 的拓扑空間的例子. 設 S 是实数集合 $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$. 命非空开集为 $S-C$, 这里的 C 是 S 的任一可数子集(可以是空集). 从 de Morgan 公式容易驗証: 这么确定的开集全体形成 S 的一个拓扑 τ. 于是有拓扑空間 $X=(S, \tau)$.

我們用反証法来証明 X 不满足公理 A_1. 設点 $x \in X$, 而且 $\{S-C_n\}$ 是可数的、点 x 处的一个拓扑基,这里的 C_n 是 X 的可数子集. 因为 S 不可数, S 中存在一点 $a \neq x$, $\in \bigcup_n C_n$. 然后 $S-\{a\}$ 是 x 的一个邻域, 但不包含任一个 $S-C_n$; 这与反証法假設矛盾,因而証明了 X 不满足公理 A_1.

施加于拓扑空間 X 的第二种限制是关于 X 的分离情况的,叫作**分离性公理**. 我們将先引进五个分离性公理的前三个.

公理 T_0 任意两个不同的点中至少一个有一个邻域,不包含另一点.

公理 T_1 任意两个不同的点各有一个邻域,不包含另一点.

公理 T_2 任意两个不同的点有不相交的邻域.

满足公理 T_i 的拓扑空間叫作 T_i **空間**, $i=0, 1, 2$. T_2 空間也叫作 **Hausdorff 空間**. 显然 T_2 空間必是 T_1 空間, T_1 空間必是 T_0 空間.

例 3.3 平庸的拓扑空間(例 1.2)不是 T_0 空間.

例 3.4 例 1.3 中的拓扑空間是 T_0 空間, 但不是 T_1 空間. 另两例見例 3.6 与例 4.2.

例 3.5 例 3.2 中的拓扑空間是 T_1 空間, 但不是 T_2 空間.(复习題.)

3.2 定理 公理 $T_1 \Leftrightarrow$ 独点集是閉集.

証 明 必要性. 設 a 是 T_1 空間 X 的任一点. X 的每一点 $x \neq a$ 有一邻域, 不包含点 a, 所以不是 $\{a\}$ 的点. 因而 $\overline{\{a\}} = \{a\}$, 即 $\{a\}$ 是閉集.

充分性. 設 a 与 b 是不同的点. 从假設, $X-\{a\}$ 与 $X-\{b\}$ 都是开集, 前者不包含 a, 而后者不包含 b; 即公理 T_1 满足了. 】

3.3 推論 度量空間是 T_1 空間. 】

現在引进后两个公理.

公理 T_3 任意一个点与不包含这点的一个閉集有不相交的邻域.

公理 T_4 任意两个不相交的閉集有不相交的邻域.

满足公理 T_3 或 T_4 的拓扑空間分别叫作**正則空間**或**正規空間**. 这两个公理既不比公理 T_2 强, 又不比公理 T_2 弱. 見以下的两个例子.

例 3.6 正則空間与正規空間而非 T_2 空間的例子. 設拓扑空間 X 只包含三个不同的点 a, b, c, 而且它的开集只是下列四个子集:

$$S, \ \{a\}, \ \{b, c\}, \ \emptyset.$$

X 也只有这四个閉集. 易見 X 是正則空間. 因为点 b 与 c 无不相交的邻域, 所以 X 不是 T_2 空間.

还易見 X 是正規空間，不是 T_1 空間，不是 T_0 空間.

例 3.7 T_2 空間而旣非正則空間又非正規空間的例子. 命 E' 为欧儿里得平面 E^2 的子空間 $\{(x, y) \mid y \geqslant 0\}$. E^2 的度量給出 E' 的一个度量，記作 d. E' 中一点 p 的以 ε 为半徑的球形邻域記作 $U(p, \varepsilon)$.

E' 的点集記作 S, S 的子集 $\{(x, 0)\}$ 記作 R. 現在在集合 S 上引进一个拓扑基 $\{V(p, \varepsilon)\}$ 如下：对于 S 的每一点 p 与每一正实数 ε, 定义

$$V(p, \varepsilon) = U(p, \varepsilon) \cap S, \text{ 当 } p \in S - R,$$
$$V(p, \varepsilon) = [U(p, \varepsilon) \cap (S - R)] \cup \{p\}, \text{ 当 } p \in R.$$

容易驗証，$\{V(p, \varepsilon)\}$ 是一个拓扑基，因而得到一个拓扑空間 X.

設 p 与 q 是 X 的任意两个不同的点，因而 $2\varepsilon = d(p, q) > 0$. 然后 p 的邻域 $V(p, \varepsilon)$ 与 q 的邻域 $V(q, \varepsilon)$ 不相交. 于是 X 是 T_2 空間. X 当然也是 T_1 空間与 T_0 空間.

另一方面，考虑点 $a = (0, 0)$ 与子集 $R - \{a\}$；后者显然是閉集. 易証它們无不相交的邻域.（复习題.）于是 X 不是正則空間. 由于 $\{a\}$ 是 X 的閉集，X 也不是正規空間.

我們把正則的 T_1 空間与正規的 T_1 空間分别叫作 **T_3 空間与 T_4 空間.** 現在，T_i 空間必是 T_{i-1} 空間，$i = 1, 2, 3, 4$. 例 3.7 也是 T_2 空間而非 T_3 空間的例子.

3.4 定理 度量空間是正規的 T_1 空間，即 T_4 空間.

証　明 設 X 是度量空間. X 必是 T_1 空間（推論 3.3）. 設 ρ 是 X 的距离函数，而且 F' 与 F'' 是 X 的任意两个不相交的閉集. 对于点 $x' \in F'$ 或 $x'' \in F''$, 分别命 $\varepsilon(x') = \frac{1}{2}\rho(x', F'')$ 或 $\varepsilon(x'') = \frac{1}{2}\rho(x'', F')$. 根据命題 I.2.7.4, $\varepsilon(x')$ 与 $\varepsilon(x'')$ 都 >0. 然后 F' 与 F'' 分别有邻域

$$U(F') = \bigcup_{x' \in F'} U(x', \varepsilon(x')), \quad U(F'') = \bigcup_{x'' \in F''} U(x'', \varepsilon(x'')).$$

如果这两个邻域相交，即存在点 $a \in U(F') \cap U(F'')$, 則将存在点 $x' \in F'$ 与 $x'' \in F''$, 使得

$$a \in U(x', \varepsilon(x')), \quad a \in U(x'', \varepsilon(x''));$$

因而(不妨設 $\varepsilon(x')\geqslant\varepsilon(x'')$)

$$\rho(x',F'')\leqslant\rho(x',x'')\leqslant\rho(x',a)+\rho(a,x'')<\varepsilon(x')+\varepsilon(x'')$$
$$\leqslant 2\varepsilon(x').$$

但这与 $\varepsilon(x')$ 的定义矛盾. ▌

习 題

1. 任一集合 S 有一个唯一的最小拓扑 τ(§1 中习题),使得 (S,τ) 是一个 T_1 空間.

2. 試作出一个 T_1 空間,其中一个收斂序列有两个不同的极限点.

3*) 試討論滿足本节中某一个公理的拓扑空間的子空間是否还滿足这公理.

4*) 試討論滿足本节中某一公理的两个拓扑空間的积空間是否还滿足这公理.

4. 公理 A_1 与 T_1 的意义:子集的聚点与收斂序列的极限点

拓扑空間的开集、閉集、閉包与收斂序列这四个基本概念是互相联系着的. 前节中所引进的公理都提到开集,因而直接地对拓扑空間的拓扑有所限制,而且不难想象对于閉集、閉包与收斂序列都有所影响. 本节将限于討論公理 A_1 与前两个分离性公理,对于閉包与收斂序列之間的一些关系的影响. 討論的背景是关于度量空間的命題 I.2.7.2, 主要的結論是后面的定理 4.4.

首先我們証明关于公理 A_1 与 T_1 的下列基本定理.

4.1 定理 設拓扑空間 X 满足公理 A_1, 而且点 $x\in X$. 則存在点 x 处的一个可数的拓扑基 $\{V_n\}$, 使得 $V_{n+1}\subset V_n$, 对于所有

---

*) 这习题的解答較长.

的自然数 n.

証　明　設 $\{U_n\}$ 是点 x 处的原先給定的一个可数的拓扑基. 命 $V_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i$. 因为 x 的有限个邻域的交集还是 x 的一个邻域，所以 $\{V_n\}$ 是 x 的可数的邻域集. 因为 $V_n\subset U_n$，所以 $\{V_n\}$ 是 x 处的一个可数的拓扑基. 显然有 $V_{n+1}\subset V_n$. ▌

4.2 定理　設 X 是滿足公理 A_1 的 T_1 空間. 則定理 4.1 中的、点 x 处的可数拓扑基 $\{V_n\}$ 具有下述性质：

$$\{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n.$$

証　明　因为 V_n 都是点 x 的邻域，所以 $x\in\bigcap V_n$. 設 $y\in X-\{x\}$. 因为 X 是 T_1 空間，$\{y\}$ 是閉集；因为 $x(\neq y)$ 不是 $\{y\}$ 的聚点，x 有一个邻域 $U\not\ni y$. 因为 $\{V_n\}$ 是点 x 处的可数的拓扑基，存在自然数 N，使得 $V_N\subset U$. 于是 $y\bar{\in}V_N$. ▌

現在設 X 是一个拓扑空間，A 是 X 的一个子集，x 是 X 的一个点. 在命題 I.2.7.2 的基础上，我們列出关于 A 与 x 的下面三个性质：

1° 子集 A 以点 x 为聚点；

2° $A-\{x\}$ 中存在一个序列，收斂到点 x；

3° $A-\{x\}$ 中存在由完全不同的点所組成的一个序列，收斂到点 x.

这三个性质明显地都是拓扑性质. 当然 3°⇒2°；而且从收斂序列的定义容易看出 2°⇒1°. 所以我們有

4.3 引理　对于拓扑空間 X，3°⇒2°⇒1°. ▌

我們将見到，对于拓扑空間 X，2° ⇏ 3°（例 4.2）. 所以在討論拓扑空間时，有必要在性质 1° 与 3° 之間增加性质 2°.

命題 I.2.7.2 就是說，对于度量空間 X，1°⇔3°，因而 1°⇔2°⇔3°. 另一方面，度量空間是滿足公理 A_1 的 T_1 空間. 这使我

們想到通过定理 4.2 来証下面更广的定理.

4.4 定理 对于满足公理 A_1 的 T_1 空間 X, 特别地对于度量空間 X, $1°\Leftrightarrow 2°\Leftrightarrow 3°$.

証 明 我們只要証明: 对于满足公理 A_1 的 T_1 空間, $1°\Rightarrow 3°$. 設 $\{V_n\}$ 是定理 4.2 中所說的、x 处的可数拓扑基. 任取它的一个成員 V_{n_1}, 例如 V_1. 根据 $1°$, V_{n_1} 中有一点 $y_1\in A-\{x\}$. 用定理 4.2 的証法, 知道存在 $n_2>n_1$, 使得 $y_1\overline{\in} V_{n_2}$. 根据 $1°$, V_{n_2} 中有一点 $y_2\in A-\{x\}$; 因而 $y_2\neq y_1$. 如此继續下去, 我們得到由 $A-\{x\}$ 中的完全不同的点所組成的一个序列 $\{y_n\}$, 收斂到 x. ▌

建議讀者想一想, 命題 I.2.7.2 的証明 (I §2 中习題 4) 中, 何处用了公理 A_1 与 T_1.

关于这三个性质的其他結果, 可总結为下面的定理:

4.5 定理 对于拓扑空間 X, $3°\Rightarrow 2°\Rightarrow 1°$; 对于满足公理 A_1 的拓扑空間 X, $1°\Leftrightarrow 2°\nRightarrow 3°$; 对于 T_1 空間 X, $1°\nRightarrow 2°\Leftrightarrow 3°$.

証 明 見后面的引理 4.6 与 4.7, 例 4.1 与 4.2. ▌

这个証明同时也是定理 4.4 的另一个証明.

4.6 引理 对于满足公理 A_1 的拓扑空間, $1°\Rightarrow 2°$.

証 明 設 $\{V_n\}$ 是定理 4.1 中的、点 x 处的一个可数拓扑基. 因为点 x 是 A 的一个聚点, 对于每一个 n, 存在 $V_n\cap(A-\{x\})$ 的一点 x_n. 根据一点处的可数拓扑基 $\{V_n\}$ 的定义, 立刻知道 x 是序列 $\{x_n\}$ 的一个极限点; 这就得到了 $2°$. ▌

例 4.1 对于例 3.2 中不满足公理 A_1 的 T_1 空間 X (参看例 3.5), $1°\nRightarrow 2°$.

設 A 是 X 的子集. 如果 A 可数, 则 A 无聚点; 如果 A 不可数 $\left(\text{例如}\left\{\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}\right)$, 則 X 的任一点 $x\left(\text{例如 } x=\frac{1}{4}\right)$ 都是 A 的一个聚点, 即 $\overline{A}=X$. (复习題.)

如果 $\{x_n\}$ 是 X 的一个收斂序列, 以 x 为极限点, 則存在一个自然数 N, 使得 $x_n=x$, 对于 $n\geqslant N$. 事实上, 如果不然, 則从 x 的邻域 $(S-\{x_n\})\cup\{x\}$

可以推知 x 不是序列$\{x_n\}$的极限点.

現在設 A 不可数. 上面的結果說明，任一点 x 是 A 的聚点，但 $A-\{x\}$ 中无序列收斂到 x，卽 $1° \nRightarrow 2°$.

然后从引理 4.3, $1° \nRightarrow 3°$.

4.7 引理 对于 T_1 空間 X, $2° \Rightarrow 3°$.

証 明 考慮 $A-\{x\}$ 中任一序列 $\{x_n\} \to x$, $x_n \neq x$ 对于每一 n. 子集 $C = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$不可能是有限的. 如果$C$有限，則根据 X 是 T_1 空間的假設，$X-C$ 将是开集，将是点 x 的一个邻域，而不包含序列$\{x_n\}$的点；这与 $\{x_n\}\to x$ 矛盾. 于是子集 C 是无穷的；此时显然存在$\{x_n\}$的一个子序列 $\{x'_n\}$，由完全不同的点 x'_n 組成，而且收斂到点 x. ▌

例 4.2 满足公理 A_1 的 T_0 空間而非 T_1 空間的例子；对于这空間，$2° \nRightarrow 3°$.

設拓扑空間 X 只包含三个不同的点 a, b, c, 而且它的非空开集是包含点 a 的所有子集.

X 是有限空間，因而满足公理 A_2 与 A_1.

易証 X 是 T_0 空間，但非 T_1 空間.

点 b 与 c 都是子集 $A=\{a\}$的聚点，$\overline{A}=X$. (不同于 T_1 空間，T_0 空間的一个有限子集可以有聚点. (复习題.))

X 的常序列 $\{x_n\}$, $x_n=a$ 对于每一 n, 以点 a, b, c 为极限点. (不同于 T_2 空間，T_0 空間的一个收斂序列可以有不只一个极限点. (复习題.)) 于是 $2° \nRightarrow 3°$.

4.8 定理 設 $f: X \to Y$ 是从满足公理 A_1 的拓扑空間 X 到拓扑空間 Y 的对应. 如果对于 X 的每一点 x 以及 X 的任一序列$\{x_n\}$收斂到点 x, 象序列$\{f(x_n)\}$收斂到$f(x)$, 則 f 連續.

参看定理 2.4 的第二个結論.

証 明 根据定理 2.4 中的 4°, 只需要証明，对于 X 的任一非空子集 A, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. 設点 $y \in f(\overline{A})$. 然后存在点 $x \in \overline{A}$ 使得 $f(x)=y$. 現在有两种可能：1) $x \in A$, 2) $x \overline{\in} A$. 在情形 1) 下，明显地点 $y \in f(A) \subset \overline{f(A)}$. 在情形 2) 下，因为 X 满足公理 A_1, 根据定理 4.5, $A-\{x\}$ 中存在一序列$\{x_n\}$, 收斂到 x. 再根据假設，

象序列$\{f(x_n)\}$收斂到$y=f(x)$. 既然$f(x_n)\in f(A)$对于每一个n, 所以从閉包的定义, $y\in\overline{f(A)}$. 于是$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$, 因而$f$連續. ▮

例 4.3 定理 4.8 中 X 滿足公理 A_1 的条件不能取消.

設拓扑空間 X 同例 3.2 中. 它不滿足公理 A_1; 而且, 如果 X 中的一个序列$\{x_n\}$收斂到点 x, 則存在一个自然数 N, 使得 $x_n=x$, 对于 $n>N$. 設 Y 是欧几里得空間 E^1 的子空間 $0\leqslant y\leqslant 1$, 而且 $f: X\to Y$ 是由 $y=f(x)=x$ 定义的对应. 然后, 明显地, 如果序列 $\{x_n\}$ 收斂到 x, 則象序列 $\{f(x_n)\}$ 收斂到 $f(x)$.

容易看出 f 不連續如下. 命 B 为 Y 的开子集 $\frac{1}{4}<y<\frac{3}{4}$. 但从例 3.2, $f^{-1}(B)$不是 X 的开子集.

5. 公理 A_2 与 T_1 的意义: 紧致性与三种列紧性

本节継續前一节討論的精神. 我們先列出对于拓扑空間而言的下列四个性质:

1° (子集式)列紧性: 任一无穷子集至少有一聚点;

2° 复盖式列紧性: 任一可数的无穷的开复盖有一有限的子复盖;

3° 序列式列紧性: 任一序列有一收斂的子序列;

4° 紧致性: 任一开复盖有一有限的子复盖.

这里的拓扑空間的复盖是仿照定义 I.5.1 得来的. 对于度量空間与对于拓扑空間, 紧致性与三种列紧性的定义完全相同. 参看定义 I.4.1, 定理 I.4.5, I.5.3. 这四个性质都是拓扑性质.

本节討論的背景是关于度量空間的定理 I.4.5 与 I.5.3, 它們分別說, 对于度量空間, 1° ⇔ 3° 与 1° ⇔ 4°. 我們将見到, 对于拓扑空間, 有必要在这三个性质之外增加性质 2°. 明显地 4° ⇒ 2°.

但 2° 不必 ⇒ 4°，因为有这种空間的例子：任一开复盖的任一可数无穷的子集都不是复盖. 由于需要的准备知識超出本书的范圍，这里不能介紹这种例子. 本节的主要定理是定理 5.6，指出公理 A_2 与 T_1 的一个意义.

例 5.1 不具有这四个性质的拓扑空間的例子. 設拓扑空間 X 同例 4.1 与例 3.2 中；它是 T_1 空間，而非 T_2 空間（例 3.5）. 从例 4.1，X 不具有性质 1° 与 3°. 現在証明 X 不具有性质 2°. 命 $C_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots\right\}$. 明显地 $\mathfrak{U}=\{S-C_n\}$ 是一个开复盖（用 de Morgan 公式），而且不包含有限的子复盖. 因为 4° ⇒ 2°，所以 X 也不具有性质 4°.

5.1 引理 对于拓扑空間 X，4° ⇒ 2° ⇒ 1°.

証　明 上文已說明 4° ⇒ 2°. 現在用反証法証明 2° ⇒ 1°. 設具有性质 2° 的拓扑空間 X 不具有性质 1°，即 X 有一个不具有聚点的无穷子集. 考慮这子集的一个可数无穷的子集 A，設它的点是 $\{a_n\}$. 然后仿照定理 I.5.3 的充分性的証明，得到 X 的一个可数无穷的开复盖，而它无有限的子复盖；这是說 X 不具有性质 2°，与假設矛盾. ▌

下一步我們是要証明 3°⇒2°；但这証明需要下面的重要定理（定理 5.2).

如果子集的序列 $\{F_n\}$ 滿足条件

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots,$$

它就叫作**下降序列**.

5.2 定理 性质 2° 与下述性质 P 等价：非空閉集的下降序列 $\{F_n\}$ 有非空的交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$.

証　明 2° ⇒ 性质 P. 設拓扑空間 X 具有性质 2°，而且 $\{F_n\}$ 是 X 中的任一下降序列，其中 F_n 都是非空閉集. 用反証法，設 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\emptyset$. 命 $U_n=X-F_n$；則 $\{U_n\}$ 是 X 的一个可数的开复盖.

根据 2°，这复盖有一个有限的子复盖

$$\{U_{n_1}, U_{n_2}, \cdots, U_{n_k}\}, \quad n_1<n_2<\cdots<n_k.$$

但 $\bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}=U_{n_k}$，所以 $X=U_{n_k}$. 这是說 $F_{n_k}=\emptyset$，与假設 F_{n_k} 非空矛盾.

性质 $P\Rightarrow 2°$. 設 X 具有性质 P，而且 $\{U_n\}$ 是 X 的任一可数无穷的开复盖. 命 $F_n=X-\bigcup_{i=1}^{n} U_i$；則 $\{F_n\}$ 是閉集的下降序列. 根据复盖的性质，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 是空集；因而根据性质 P，必有一个 $F_k=\emptyset$，卽 $X=\bigcup_{i=1}^{k} U_i$. 所以复盖 $\{U_n\}$ 有一个有限的子复盖 $\{U_1, U_2, \cdots, U_k\}$. ∎

5.3 引理 对于拓扑空間，$3°\Rightarrow 2°\Rightarrow 1°$.

証 明 引理 5.1 中已証明了 $2°\Rightarrow 1°$. 現在来証明 $3°\Rightarrow 2°$，用定理 5.2 中的性质 P 来替代 2°. 設 $\{F_n\}$ 是 X 中的任一下降序列，其中 F_n 都是非空閉集. 任意取一点 $x_n\in F_n$，得到 X 中的一序列 $\{x_n\}$. 根据 3°，序列 $\{x_n\}$ 有一收斂的子序列 $\{x_{n_i}\}$，收斂到点 x，$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$. 对于任意的 k，$x_{n_i}\in F_{n_k}$ 当 $i\geqslant k$；因而，由于 F_{n_k} 是閉集，极限点 $x\in F_{n_k}$. 然后容易看出极限点 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$，卽 X 具有性质 P. ∎

5.4 定理(Lindelöf 定理) 如果拓扑空間 X 滿足公理 A_2(卽具有一个可数的拓扑基 $\mathfrak{B}$)，則它的任一开复盖 $\mathfrak{U}$ 有一个可数的子复盖.

証 明 根据命題 1.3.1，$\mathfrak{U}$ 的每一成員是 $\mathfrak{B}$ 的若干成員的幷集. 故对于 $\mathfrak{U}$ 的任一成員 U，$\mathfrak{B}$ 的成員中有些 $\subset U$；$\mathfrak{B}$ 的这种成員的全体

$$\{B \mid B\in\mathfrak{B}, B\subset U\}$$

是 $\mathfrak{B}$ 的一个子族. 当 U 遍历 $\mathfrak{U}$，这些子族的幷集記作 $\mathfrak{B}'$:

$$\mathfrak{B}'=\{B \mid B\in\mathfrak{B},\ B\subset U; U\in\mathfrak{U}\};$$

$\mathfrak{B}'$ 仍是 $\mathfrak{B}$ 的一个子族.

現在,对于 $\mathfrak{B}'$ 的每一个成員 B', 取定 $\mathfrak{U}$ 的一个成員 $U(B')\supset B'$. 然后考虑这种$U(B')$的全体：

$$\mathfrak{U}'=\{U(B') \mid B'\in\mathfrak{B}'\};$$

因为 $\mathfrak{B}'$ 可数, $\mathfrak{U}'$ 是 $\mathfrak{U}$ 的一个可数子族.

現在要証明的是：$\mathfrak{U}'$ 是 X 的一个复蓋，因而 $\mathfrak{U}$ 有一个可数的子复蓋 $\mathfrak{U}'$. 事实上, X 的任一点必 $\in\mathfrak{U}$ 的某一个成員 U, 因而必 $\in U$ 所包含的某一个成員 B; 从 $\mathfrak{B}'$ 的定义,这里所說的 $B\in\mathfrak{B}'$; 于是 $x\in U(B)\in\mathfrak{U}'$. ▌

5.5 推論 对于滿足公理 A_2 的拓扑空間, $2°\Rightarrow 4°$. ▌

現在我們可以証明本节中的主要定理：

5.6 定理 对于滿足公理 A_2 的 T_1 空間，特别地对于度量空間, $1°\Leftrightarrow 2°\Leftrightarrow 3°\Leftrightarrow 4°$.

証 明 首先,对于度量空間,根据定理 I.4.6, 引理 5.1, 定理 I.4.5 与 I.5.3, 这四个性质的任一个蘊涵度量空間滿足公理 A_2. 所以根据定理 I.4.5, I.5.3 与推論 5.5, 本定理的結論对于度量空間成立.

現在設 X 是滿足公理 A_2 的 T_1 空間. 根据引理 5.1, 5.3 与 5.4, 只需要証明：对于 X, $1°\Rightarrow 3°$.

設$\{x_n\}$是 X 中的任一序列. 如果序列$\{x_n\}$有一子序列，其点完全相同, 則这子序列收斂. 所以只要考虑沒有这种子序列的序列$\{x_n\}$. 当序列$\{x_n\}$沒有这种子序列时,它显然有由完全不同的点所組成的一个子序列$\{y_n\}$. 考虑无穷子集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{y_n\}$. 根据假設 1°, A 有一聚点 $y\in X$.

現在,因为 X 也是滿足公理 A_1 的 T_1 空間，我們可以对于 A

与 y 应用定理 4.4（定理 4.4 中的 $1°\Rightarrow 3°$），得到 $A-\{y\}$ 中的、由完全不同的点所組成的一个序列 $\{z_n\}$，收斂到 y.

由于序列 $\{y_n\}$ 的点完全不同，序列 $\{z_n\}$ 的点完全不同，以及序列 $\{z_n\}\subset A-\{y\}$. 序列 $\{z_n\}$ 与序列 $\{y_n\}$ 显然有一个公共的子序列 $\{w_n\}$；于是序列 $\{x_n\}$ 有一个子序列 $\{w_n\}$ 收斂到 y. ▌

讀者可参看定理 I.4.5 的証明.

关于这四个性质的其他結果，有下面的定理：

5.7 定理 对于拓扑空間，$4°\Rightarrow 2°\Rightarrow 1°$，$3°\Rightarrow 2°\Rightarrow 1°$；对于满足 A_1 的拓扑空間，$1°\nRightarrow 2°\Leftrightarrow 3°$；对于满足 A_2 的拓扑空間，$1°\nRightarrow 2°\Leftrightarrow 3°\Leftrightarrow 4°$；对于 T_1 空間，$1°\Leftrightarrow 2°$；因而对于满足公理 A_1 的 T_1 空間，$1°\Leftrightarrow 2°\Leftrightarrow 3°$.

証 明 見后面的引理 5.8, 5.9 与例 5.2. ▌

这个証明同时也是定理 5.6 的另一个証明.

5.8 引理 对于满足公理 A_1 的拓扑空間，$2°\Rightarrow 3°$.

証 明 設 $\{x_n\}$ 是满足公理 A_1 的拓扑空間 X 中的任一序列. 用 A_n 表示集合 $\bigcup\limits_{i\geqslant n}\{x_i\}$. 則

$$\bar{A}_1\supset\bar{A}_2\supset\cdots\supset\bar{A}_n\supset\cdots$$

是 X 中的非空閉集的下降序列. 从性质 $2°$ 与定理 5.2，X 中存在一点

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n.$$

設 $\{V_n\}$ 是定理 4.1 中所說的、点 x 处的一个可数的拓扑基：

$$V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_n\supset\cdots.$$

因为 $x\in\bar{A}_1$，所以 x 的邻域 V_1 中有 A_1 的一点 x_{n_1}，$n_1\geqslant 1$；因为 $x\in\bar{A}_{n_1+1}$，所以 V_2 中有 A_{n_1+1} 的一点 x_{n_2}，$n_2>n_1$；如此类推，得到序列 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_i}\}$，其中 $x_{n_i}\in V_i$. 因为 $\{V_n\}$ 具有定理 4.1 中所說的性质，子序列 $\{x_{n_i}\}$ 收斂到点 x. 这就証明了空間 X 具有性质 $3°$. ▌

5.9 引理 对于 T_1 空間，$1°\Rightarrow 2°$.

証 明 用反証法，設 X 有性质 $1°$，但它的一个可数无穷的开复盖 $\mathfrak{U}=\{U_n\}$ 不包含有限的子复盖. 然后对于每一个 n，$F_n=X-\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\right)$ 是非空閉

集．在 F_n 中任取一点 x_n，作成子集 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$．

首先，如果 A 是无穷集合，则性质 1° 說 A 有一个聚点 x，而且公理 T_1 蘊涵：x 的每一邻域包含 A 的无穷多个点；因而 x 是集合 $A_n=\bigcup_{i\geq n}\{x_i\}$的一个聚点．但 A_n 是閉集 F_n 的子集，所以 $x\in F_n$ 对于每一个 n；因而 $x\bar{\in} U_n$ 对于每一个 n．这与 $\mathfrak{U}$ 是 X 的复盖矛盾．所以 A 是有限集合．

其次，如果 A 有限，则存在 A 中的一点 a 与自然数序列 $n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$，使得 $x_{n_i}=a$．但根据 F_n 与 x_n 的作法（$F_n\supset F_{n+1}$ 与 $x_n\in F_n$），$a\in F_n$ 对于每一个 n．这又与 $\mathfrak{U}$ 是 X 的复盖矛盾．】

例 5.2 滿足公理 A_2 但不滿足公理 T_1 的拓扑空間的例子；对于这空間，$1°\not\Rightarrow 2°$，$1°\not\Rightarrow 3°$．

設 S 是所有自然数的集合．对于每一自然数 n，命 $B_n=\{2n-1, 2n\}$．$\mathfrak{B}=\{B_n\}$ 显然是 S 的一个拓扑基；S 与 $\mathfrak{B}$ 給出一个拓扑空間 X．容易看出 X 不是 T_1 空間（也不是 T_0 空間）．

X 具有性质 1°．事实上，对于每一自然数 n，点 $2n$ 是独点集$\{2n-1\}$的一个聚点，而且点 $2n-1$ 是独点集$\{2n\}$的一个聚点；因而 X 的每一非空子集至少有一个聚点，因而 X 具有性质 1°．

X 不具有性质 2°．事实上，$\mathfrak{B}$ 是 X 的一个可数无穷的复盖，但不包含有限的子复盖．

附带指出，从序列$\{n\}$可知 X 也不具有性质 3°．

5.10 定理 紧致的拓扑空間 X 的任一閉子集 F 是紧致的．

証 明 根据子集的紧致性的定义（§5），我們要証明的是：閉子集 F 作为拓扑空間（X 的子空間）时，F 的任一开复盖 $\mathfrak{B}=\{V_\alpha\}$有一有限的子复盖．因为 F 是 X 的子空間，存在 X 的开集 U_α，使得 $V_\alpha=U_\alpha\cap F$；因为 F 是 X 的閉子集，$X-F$ 是开集．然后明显地，$\mathfrak{U}=\{U_\alpha, X-F\}$是 X 的一个开复盖；因为 X 紧致，这复盖 $\mathfrak{U}$ 有一个有限的子复盖，$\mathfrak{U}'$（$X-F$ 可能 $\in$，也可能 $\bar{\in}\ \mathfrak{U}'$）．然后 $\mathfrak{U}'$ 的成員与 F 的交集組成 F 的一个开复盖，而且是 F 的开复盖 $\mathfrak{B}$ 的有限子复盖．这就証明了 F 紧致．】

习　題

1．試証：滿足公理 A_2 的拓扑空間有可数的稠密子集．

2. 設$\{F_\alpha\}$是拓扑空間 X 的一族閉集. 如果族 $\{F_\alpha\}$ 的每一有限的非空子族的全体成員的交集非空,我們就說族$\{F_\alpha\}$具有有限非空交的性质. 如果 X 的每一具有有限非空交的性质的族$\{F_\alpha\}$也使得 $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$, 我們就說 X 具有性质 Q. 試証:拓扑空間 X 紧致 $\Leftrightarrow X$ 具有性质 Q.

[提示: 参看定理 5.2.]

3. 試証: 定理 5.10 中的"紧致"可改为列紧, 或复蓋式列紧, 或序列式列紧. 討論定理 5.10 以及改后所得的命題中的"閉"可否删去.

4. 設 X_1 与 X_2 是拓扑空間. 試証:积空間 $X_1 \times X_2$ 紧致 $\Leftrightarrow X_1$ 与 X_2 都紧致.

6. 正則空間・正規空間・度量化定理

本节只用分离性公理与可数基公理 A_2,而不涉及各种列紧性与紧致性. 本节从正則空間与正規空間的各一种刻划开始, 通过正規空間中的連續函数的討論,得到具有可数基的正規的 T_1 空間与具有可数基的正則的 T_1 空間的度量化定理.

6.1 定理 拓扑空間 X 是正則空間 $\Leftrightarrow$ 拓扑空間 X 的任一点的每一个邻域包含这个点的一个邻域的閉包.

証 明 必要性. 設 X 是正則空間, x 是它的任一点, $U(x)$ 是 x 的任一邻域. 根据正則空間的定义, $\{x\}$ 与閉集 $F=X-U(x)$ 各有一个邻域 $V(x)$ 与 $V(F)$, 使得 $V(x)\cap V(F)=\emptyset$, 即使得 $V(x)\subset X-V(F)$. 然后

$$\overline{V(x)}\subset\overline{X-V(F)}=X-V(F)\subset X-F=U(x).$$

充分性. 設拓扑空間 X 已滿足定理的条件. 我們要証明 X 正則. 为此, 考慮 X 的任一点 x 与 X 的、不包含 x 的任一閉集 F. 首先, $U(x)=X-F$ 就是点 x 的一个邻域. 根据假設, x 有一个邻域 $V(x)$, 使得 $\overline{V(x)}\subset U(x)$. 因为 $U(x)\cap F=(X-F)$

$\cap F=\emptyset, \overline{V(x)} \cap F=\emptyset$; 于是 $X-\overline{V(x)}$ 是 F 的一个邻域，不交 $V(x)$. ▌

6.2 定理 拓扑空間 X 是正規空間 $\Leftrightarrow$ 拓扑空間 X 的任一閉集的每一个邻域包含这个閉集的一个邻域的閉包.

証 明 必要性. 設 X 是正規空間, F 是它的任一閉集, $U(F)$ 是 F 的任一邻域. 根据正規空間的定义, F 与 $F'=X-U(F)$ 这两个閉集各有一个邻域 $V(F)$ 与 $V(F')$, 使得 $V(F)\cap V(F')=\emptyset$, 卽使得 $V(F)\subset X-V(F')$. 然后, 同前一定理的証明中一样,

$$\overline{V(F)}\subset X-V(F')\subset X-F'=U(F).$$

充分性. 設拓扑空間 X 已滿足定理的条件. 我們要証明 X 正規. 为此, 考虑 X 的任意两个不相交的閉集 F_1 与 F_2. 首先, $U(F_1)=X-F_2$ 是 F_1 的一个邻域. 根据假設, F_1 有一个邻域 $V(F_1)$, 使得 $\overline{V(F_1)}\subset U(F_1)$. 然后同前一定理的証明中一样, $X-\overline{V(F_1)}$ 是 F_2 的一个邻域, 不交 $V(F_1)$. ▌

定理 6.1 与 6.2 分别是正則空間与正規空間的一种刻划，也可以分别看作正則空間与正規空間的另一个定义.

一个空間的拓扑影响这空間中所有可能存在的函数. 例如在例 4.2 的 T_0 空間中, 連續函数必是常值函数. (复习題.) 現在我們介紹正規空間中的、利用連續函数的一种刻划及其应用.

6.3 定理 拓扑空間 X 是正規的 $\Leftrightarrow$ 对于拓扑空間 X 的任意两个不相交的閉集 A 与 B, 存在連續函数 $f: X\to[0, 1]$, 使得 $f(x)=0$ 当 $x\in A$, $f(x)=1$ 当 $x\in B$.

証 明 充分性. 設 A 与 B 是拓扑空間 X 的任意两个不相交的閉子集. 設条件已滿足, f 是条件中所說的連續函数. 取 $[0,1]$ 的两个开子集 $G=\left[0, \frac{1}{4}\right)$, $H=\left(\frac{3}{4}, 1\right]$, 而且命 $U=f^{-1}(G)$, V

$=f^{-1}(H)$. 明显地 U 与 V 是分别包含 A 与 B 的、两个不相交的开集. 于是 X 正規.

必要性(Урысон 引理). 設拓扑空間 X 正規, 而且 A 与 B 是 X 的任意两个不相交的閉子集. 我們要来作出条件中所說的函数 f. 因为 $X-B$ 是 A 的一个邻域, 根据定理 6.2, A 有一邻域 U, 使得

$$A\subset U\subset \overline{U}\subset X-B.$$

在进而作 f 之前, 我們先粗略地描写一下将采用的作法. 首先注意 $[0, 1]$ 的 2 等分的分点是 $\frac{1}{2}$, 4 等分的分点是 $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, 以至于 2^n 等分的分点是 $r/2^n$, $r=1, 2, \cdots, 2^n-1$. 在 2^n 等分的分点中, 那些具有正偶数 r 的已經是 2^{n-1} 等分时或更早等分时的分点. 其次, 相当于每一个分点 $\tau=\frac{r}{2^n}$, 我們将要作出 X 的一个开集 U_τ, 使得, 对于 $\tau<\tau'$,

$$A\subset U\subset \overline{U}\subset U_\tau\subset \overline{U}_\tau\subset U_{\tau'}\subset \overline{U}_{\tau'}\subset X-B. \tag{1}$$

最后, 我們将要根据 X 的任一点 x 属于或不属于那些 U_τ 来定义 $f(x)$, 得到定理的証明.

第一步, 現在从上文的 U 出发, 正式地作 U_τ. 完全同上文从 A 与它的邻域 $X-B$ 出发取定 U 一样, 現在从 X 的閉集 $\overline{U}$ 与它的邻域 $X-B$ 出发, 取定 X 的一个开集 $U_{1/2}$, 使得

$$\overline{U}\subset U_{1/2}\subset \overline{U}_{1/2}\subset X-B.$$

这是我們用归納法来作 $\{U_\tau\}$ 的第一步. 再假設对于 $\tau=\frac{r}{2^n}$, $r=1, 2, \cdots, 2^n-1$, $n=1, 2, \cdots, k(\geqslant 1)$, 已取定滿足条件(1)的 U_τ. 現在考虑 $\tau=\frac{r}{2^{k+1}}$, $r=1, 2, \cdots, 2^{k+1}-1$. 当 τ 的分子 r 是偶数, 根据归納法假設, U_τ 已經取定了; 所以只要作那些 U_τ, τ 的分子是奇数, 使得它們滿足条件(1), 即

$$A\subset U\subset\overline{U}\subset\cdots\subset U_{(r-1)/2^{k+1}}\subset\overline{U}_{(r-1)/2^{k+1}}\subset U_{r/2^{k+1}}\subset\overline{U}_{r/2^{k+1}}$$
$$\subset U_{(r+1)/2^{k+1}}\subset\overline{U}_{(r+1)/2^{k+1}}\subset\cdots\subset X-B. \tag{2}$$

設 r 是奇数，因而 $r-1$ 与 $r+1$ 是偶数．如果 $r\neq 1,\ 2^{k+1}-1$，完全同上文从 A 与 $X-B$ 出发取定 U 一样，現在从 $\overline{U}_{(r-1)/2^{k+1}}$ 以及它的邻域 $U_{(r+1)/2^{k+1}}$ 出发取定满足条件 (2) 的一个 $U_{r/2^{k+1}}$；如果 $r=1$ 或 $2^{k+1}-1$，取法类似．这就完成了所有的 U_τ 的作法．

第二步，定义所求的函数 $f: X\to[0,1]$．如果 X 的点 x 属于某些 U_τ，則命 $f(x)$ 为全体这种 τ 的下确界；如果 x 不属于任一个 U_τ，則命 $f(x)=1$．明显地，$f(x)=0$ 当 $x\in A$，而 $f(x)=1$ 当 $x\in B$.

最后，証明 f 連續．設点 $x_0\in X$ 而且 $0<f(x_0)<1$．对于任意 $\varepsilon>0$，使得 $0\leqslant f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon\leqslant 1$，我們要找得 x_0 的一个邻域 $V(x_0)$，使得 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，当 $x\in V(x_0)$．明显地 $[0,1]$ 有两个重分点 τ 与 τ'，使得 $f(x_0)-\varepsilon<\tau<f(x_0)<\tau'<f(x_0)+\varepsilon$；然后可取 $V(x_0)=U_{\tau'}-\overline{U}_\tau$．在 $f(x_0)=0$ 或 1 的情形下，証明类似．∎

定理 6.3 中的条件还可以改为：对于 X 的任意两个不相交閉集 A 与 B，存在連續函数 $g: X\to[a,b]$，使得 $g(x)=a$，当 $x\in A$，$g(x)=b$，当 $x\in B$．事实上，可以通过从 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 上的拓扑映射 $h(x)=a+(b-a)x$，取 $g=hf$.

从定理 6.3 的充分部分，可以得到下面的重要定理．

6.4 定理(Урысон 嵌入定理)　每一个具有可数基的正规的 T_1 空間 X 同胚于 Hilbert 空間(的基本方体)的一个子集．

証　明　設正規的 T_1 空間 X 的一个可数基是 $\mathfrak{B}=\{B_n\}$．根据定理 6.2 以及拓扑基与邻域的定义，給定了任一 B_j，必存在 B_i 使得 $\overline{B}_i\subset B_j$．(这蘊涵 $\overline{B}_i\cap(X-B_j)=\emptyset$.)这样的一对 (B_i, B_j) 叫作一个典型对．由于基 $\mathfrak{B}$ 可数，所有的典型对形成一个可数集，因而

可以排列成一个序列：

$$\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots,\ \pi_n,\ \cdots;\quad \pi_n=(B_i,\ B_j).$$

根据定理 6.3 的充分部分，对于每一个典型对 $\pi_n=(B_i,\ B_j)$，作出具有下述性质的連續函数 $f_n\colon\ X\to[0,\ 1]$：

$f_n(x)=0$，当 $x\in\bar{B}_i$；$f_n(x)=1$，当 $x\in X-B_j$，$0\leqslant f_n(x)\leqslant 1$。对于 X 的任一点 x，命

$$f(x)=(f_1(x),\ f_2(x)/2,\ \cdots,\ f_n(x)/n,\ \cdots).$$

因为級数 $\sum f_n^2(x)/n^2$ 收斂而且 $|f_n(x)/n|\leqslant\dfrac{1}{n}$，所以 $f(x)$ 可以看作 Hilbert 空間的基本方体 J^ω 的一个点．因而有对应 $f\colon\ X\to J^\omega$．現在还要証明的是 $f\colon\ X\to f(X)$ 是拓扑映射．

首先証明 f 是一一对应，即 X 的不同的两点 x 与 x' 的象点 $f(x)$ 与 $f(x')$ 不同．对于給定的 x 与 x'，由于 X 是正規的 T_1 空間，存在一个 B_j，使得 $x\in B_j$，$x'\in X-B_j$．然后存在一个典型对 $\pi_n=(B_i,\ B_j)$，其中 $B_i\ni x$．因而 $f_n(x)=0$，而 $f_n(x')=1$；于是 $f(x)\neq f(x')$．

其次証明 f 連續．設給定了 X 的任一点 x_0 与任一正数 ε．不妨假設 $\varepsilon^2<2$．我們要得出 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得 $\rho(f(x),\ f(x_0))<\varepsilon$，对于任一点 $x\in U(x_0)$．虽然 $f(x)$ 的每一个坐标都是連續函数，但 $f(x)$ 却有无穷多个坐标；所以我們进行如下．第一，取定一个充分大的正整数 N，使得

$$\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

第二，对于 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$，由于 $f_i(x)$ 的連續性，能求得点 x_0 的一个邻域 $U_i(x_0)$，使得

$$|f_i(x)-f_i(x_0)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,N},$$

对于任一点 $x\in U_i(x_0)$．最后，用 $U(x_0)$ 表示 $U_1(x_0)$，$U_2(x_0)$，$\cdots$，

$U_N(x_0)$的交集，它是点 x_0 的一个邻域． 我們說，$U(x_0)$ 就是所求的邻域．事实上，对于任一点 $x\in U(x_0)$，有

$$\rho^2(f(x),f(x_0))=\sum_{n=1}^{N}\frac{[f_n(x)-f_n(x_0)]^2}{n^2}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{[f_n(x)-f_n(x_0)]^2}{n^2}<\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}=\varepsilon^2.$$

这就証明了 f 連續．

最后証明 f^{-1}: $f(X)\to X$ 連續．設給定任一点 $y_0\in f(X)$，并且 $x_0=f^{-1}(y_0)$．現在对于 x_0 的任一邻域 $U(x_0)$，要得出 y_0 的、在 $f(X)$ 中的一个 ε-球形邻域 $V(y_0,\varepsilon)$，使得 $f^{-1}(V(y_0,\varepsilon))\subset U(x_0)$．为着要得出一个 ε，先选定一个典型对 $\pi_n=(B_i,B_j)$，使得 $x_0\in B_i$，$B_j\subset U(x_0)$．我們說，$\frac{1}{n}$ 就是所要得出的一个 ε；即当 $y\in V\left(y_0,\frac{1}{n}\right)$ 时，$f^{-1}(y)=x\in U(x_0)$．

事实上，如果 $x\bar{\in} U(x_0)$，即 $x\in X-U(x_0)$，則将有 $f_n(x)=1$．又因为 $x_0\in B_i$，有 $f_n(x_0)=0$；所以

$$\frac{f_n(x)}{n}-\frac{f_n(x_0)}{n}=\frac{1}{n}.$$

于是

$$\rho(y,y_0)=\rho(f(x),f(x_0))\geqslant\left|\frac{f_n(x)}{n}-\frac{f_n(x_0)}{n}\right|=\frac{1}{n}=\varepsilon,$$

与 $y\in V\left(y_0,\frac{1}{n}\right)$ 矛盾．∎

从例 I.4.4 与定理 3.4，立刻得到定理 6.4 的下面两个值得提出的推論．

6.5 推論 拓扑空間 X 同胚于 Hilbert 空間的一个子集 ⇔ 拓扑空間 X 是正規的 T_1 空間并且具有可数基．

这推論的意义在于用拓扑性质刻划了例 I.1.3 中具体地定义的 Hilbert 空間的子集．

6.6 推論 具有可数基的拓扑空間 X 能度量化 $\Leftrightarrow$ 具有可数基的拓扑空間 X 是正規的 T_1 空間.

結合着推論 6.6, 讀者可参看例 3.1.

推論 6.6 已經是一个度量化定理. 我們現在要証明一个更强的度量化定理:

6.7 定理(度量化定理) 具有可数基的一个拓扑空間 X 能度量化 $\Leftrightarrow$ 具有可数基的拓扑空間 X 是正則的 T_1 空間.

这定理显明地是推論 6.6 与下面的定理的直接推論.

6.8 定理(Тихонов) 每一个具有可数基的正則空間是正規空間.

証 明 設 A 与 B 是具有可数基的正則空間 X 的任意两个不相交的閉集. 因为 X 正則,以及 B 是 X 的閉集,根据定理 6.1, A 的每一点 x 有一邻域 $U(x)$, 其閉包不交 B; 因而 X 中所有的 $U(x)$ 組成 A 的、在 X 中的 (参看定义 I.5.1) 一个开复蓋 $\mathfrak{U}$. 同样地得到 B 的、在 X 中的一个开复蓋 $\mathfrak{V}=\{V(y)\mid y\in B\}$. 而且 $\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V}\cup\{X-(A\cup B)\}$是 X 的一个开复蓋. 根据定理 5.4, X 的这个复蓋有一个可数的子复蓋; 然后容易推出, A 的、在 X 中的开复蓋 $\mathfrak{U}$ 包含一个可数的子复蓋$\{U_n\}$, B 的、在 X 中的开复蓋 $\mathfrak{V}$ 包含一个可数的子复蓋$\{V_n\}$.

命

$$U'_n=U_n-\bigcup_{p\leq n}\overline{V}_p,\quad V'_n=V_n-\bigcup_{p\leq n}\overline{U}_p.$$

它們都是开集. (复习題.) 容易看出 $U'_n\cap V_m=\emptyset$ 对于 $m\leq n$; 然后得到 $U'_n\cap V'_m=\emptyset$ 对于 $m\leq n$. 应用同样的理由,但互換 U 与 V 的地位,就得到 $U'_n\cap V'_m=\emptyset$, 对于所有的 n 与 m.

命

$$U'=\bigcup_{n=1}^{\infty}U'_n,\quad V'=\bigcup_{n=1}^{\infty}V'_n;$$

它們都是开集. 从 $U'_n \cap V'_m = \emptyset$ 对于所有的 n 与 m, 就有 $U' \cap V' = \emptyset$. 再者, 因为 $\overline{V}_p \cap A = \emptyset$ 对于所有的 p, 所以 $A \subset U'$; 同样地, $B \subset V'$. 于是任意两个閉集 A 与 B 有不相交的邻域 U' 与 V', 即 X 正規. ∎

习 題

1. 举例說明非正則的 T_2 空間不滿足定理 6.1 中的条件.

2. 举例說明非正規的 T_2 空間不滿足定理 6.2 中的条件.

3. 設定理 6.3 中的 $X=[-1, 1]$, $A=\{-1\}$, $B=\{1\}$. 試作出 $\{U_\tau\}$ 及映射 f, 使得 $f|[0, 1]$ 是恒同映射.

再作出另一族 $\{U_\tau\}$ 及映射 f, 使得 $f\Big|\left[0, \frac{1}{2}\right]: \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ 是滿映射.

4. 設定理 6.4 中 X 的可数基 $\mathfrak{B}=\{B_n\}$ 的成員 $\overline{B}_1 = B_1$ 是独点集. 試选取另一个适当的可数基 $\mathfrak{B}'$ 以及典型对, 使得在映射 f 下 B_1 的象点 $f(B_1)$ 的第一个坐标是 1, 其他坐标都是 0.

7. 紧致 Hausdorff 空間*)

如果我們可以說 §4 与 §5 表明了 T_1 空間, 而非更广的拓扑空間, 具有了一些重要的空間性质, 我們希望还可以說, 本节将表明紧致 Hausdorff 空間, 不必再加以限制, 已保留了度量空間的相当多的重要性质.

本节共分三部分. 开始部分 (推論 7.5 以前) 与末尾部分 (定理 7.8 以后, 定理 7.1 应用到映射) 都只用分离性公理与紧致性, 而不涉及可数性公理; 只中間部分 (有关度量化的两个推論) 才用到可数基公理 A_2. 末尾部分是 I§5 的末尾部分的推广; 它与定理

*) 法国 N. Bourbaki 把这里的紧致 Hausdorff 空間叫作"紧致空間".

7.1 也可提前放在本章 § 5 的末尾.

7.1 定理 Hausdorff 空間 X 的每一个紧致子集 A 是閉集.

証 明 設 p 是 $X-A$ 的任一点.我們要証明 $X-A$ 是开集,即 p 有一个邻域不交 A. 既然 X 是 Hausdorff 空間,对于点 p 与 A 的每一点 x,存在 p 的一个邻域 $U(p;x)$ 与 x 的一个邻域 $V(x)$,而且它們不相交. $\{V(x)|x\in A\}$ 是 A 的、在 X 中的一个开复盖(定义 I.5.1);它有一个有限的子复盖 $\{V(x_1),V(x_2),\cdots,V(x_n)\}$,因为 A 紧致,即因为 A 的任一开复盖有一个有限的子复盖.(复习題.)命 $U(p)=\bigcap_{i=1}^{n}U(p_i;x_i)$. $U(p)$ 是 p 的一个邻域. 因为 $\{V(x_1), V(x_2), \cdots, V(x_n)\}$ 是 A 的、在 X 中的复盖,而且 $U(p)\cap V(x_i)=\emptyset$, 所以 $U\cap A=\emptyset$. ▌

本定理与定理 5.10 給出下面的表:

Hausdorff 空間的子集:	紧致 $\Rightarrow$ 閉,
紧致 Hausdorff 空間的子集:	紧致 $\Leftarrow$ 閉;因而
紧致 Hausdorff 空間的子集:	紧致 $\Leftrightarrow$ 閉.

讀者可参看 I § 4 中的表.

在定理 7.1 的証明中,如果命 $V=\bigcup_{i=1}^{n}V(x_i)$,則 V 是 A 的一个邻域,而且 $U\cap V=\emptyset$. 这就証明了比定理 7.1 更强的下述定理:

7.2 定理 設 p 是 Hausdorff 空間 X 的任一点, A 是 X 的任一不包含 p 的紧致子集. 則 p 与 A 有不相交的邻域. ▌

这定理又可以推广成下述定理:

7.3 定理 Hausdorff 空間 X 中任意两个不相交的紧致子集 A 与 B 有不相交的邻域.

証 明 根据定理 7.2, A 的任一点 x 与 B 有不相交的邻域 $U(x)$ 与 $V(B;x)$. $\{U(x)|x\in A\}$ 是 A 的、在 X 中的一个开复盖,因而有一个有限的子复盖 $\{U(x_1), U(x_2), \cdots, U(x_m)\}$. 命 $U=$

$\bigcup_{i=1}^{m} U(x_i)$, $V=\bigcap_{i=1}^{m} V(B;x_i)$. 明显地, $U\supset A$, $V\supset B$, 而且 $U\cap V=\emptyset$. ▌

結合着定理 5.10, 定理 7.2 与定理 7.3 分别說紧致 Hausdorff 空間是正則的与正規的. 所以我們有下面的重要推論.

7.4 推論 每一个紧致的 Hausdorff 空間是正則的, 而且是正規的. ▌

这推論的另一提法是:

7.5 推論 下列三种类型的拓扑空間是相同的: 紧致 Hausdorff 空間,紧致正則的 T_1 空間,紧致正規的 T_1 空間. ▌

从定理 7.4 还可得出下列两个度量化定理(参看 I§5 的例):

7.6 推論 紧致(或列紧)拓扑空間 X 能度量化⇔紧致(或列紧)拓扑空間 X 是具有可数基的 Hausdorff 空間.

証 明 首先,根据定理 5.6, 对于能度量化的拓扑空間以及对于具有可数基的 Hausdorff 空間,紧致性与列紧性是等价的.

必要性. 根据定理 3.4,能度量化的拓扑空間 X 是正規的 T_1 空間, 因而是 Hausdorff 空間; 根据定理 I.4.6, 紧致或列紧的能度量化空間 X 具有可数基.

充分性. 根据推論 7.4, 紧致或列紧 Hausdorff 空間 X 是正規的 T_1 空間;再根据推論 6.6, X 能度量化. ▌

同样容易地,可以証明下面的推論:

7.7 推論 紧致(或列紧) Hausdorff 空間 X 能度量化 ⇔ 紧致(或列紧) Hausdorff 空間 X 具有可数基. ▌

在本节的末尾,我們要应用定理 7.1 到映射,以得到定理与推論 I.5.4 到 I.5.7 的推广.

7.8 定理 如果 $f\colon X\to Y$ 是从紧致拓扑空間 X 到拓扑空

間 Y 的映射,則 $f(X)$ 是 Y 的紧致子集.

証　明　仿照定理 I.5.4 的証明. 那里用定理 I.5.3,但現在用紧致性的定义. ∎

7.9 推論　紧致拓扑空間 X 中的任一連續函数是有界的,而且能在 X 的点处达到它的最大值与最小值.

証　明　仿照推論 I.5.5 的証明. 那里用定理 I.5.4, 但現在用定理 7.8. ∎

7.10 推論　如果 $f: X \to Y$ 是从紧致拓扑空間 X 到 Hausdorff 空間 Y 的映射,則 f 是閉映射.

証　明　仿照推論 I.5.6 的証明. 那里用定理 4.3, 5.4 与 4.2,但現在用定理 5.10, 7.8 与 7.1. ∎

7.11 定理　如果 $f: X \to Y$ 是从紧致拓扑空間 X 到 Hausdorff 空間的一一滿映射,則 f 是拓扑映射.

証　明　仿照定理 I.5.7 的証明. 那里用推論 I.5.6, 但現在用推論 7.10. ∎

习　題

1. 試証: Hausdorff 空間的两个紧致子集的交集是紧致的.

2. 試証: 正則空間的紧致子集的閉包是紧致的.

3. 是否任一个拓扑空間的每一个紧致子集都是閉的? 把紧致改为列紧,或复蓋式列紧,或序列式列紧呢?

4. 試討論序列式列紧性,复蓋式列紧性与列紧性是否也同紧致性一样(定理 7.8),是在映射下的不变性质.

8. 連 通 性

在 §3 中我們引進了拓扑空間 X 的分离性公理. 那里所說的

分离性是关于 X 的局部結构，关于 X 的任意两个子集(两点，一点与一閉集，或两閉集)有否不相交的邻域．在本节中我們将引进关于 X 的一个整体結构——連通性．按照这将引进的概念，欧儿里得平面 E^2 中的椭圓是連通的，双曲綫是非連通的，虽然它們作为度量空間都是正規的 T_1 空間．

本节的主要定理是8.3, 8.4与8.7．从前两个定理得知欧儿里得空間 E^n 与 E^1 上的各种区間都是連通的；后一个定理的推論8.8說明連通性的意义．此外，还引进限制更强的、与直观意义更明显的道路連通性．

8.1 定义 如果一个拓扑空間 X 是它的两个非空的、不相交的开子集 A 与 B 的并集，它就叫作**非連通的**拓扑空間．把非連通的拓扑空間 X 的这样一对子集 A 与 B 叫作 X 的一个**分解**：$X=A\cup B$．如果 X 不是非連通的，它就叫作**連通的**拓扑空間．拓扑空間的一个子集叫作連通的或非連通的子集，按照它作为子空間时，是連通的或非連通的拓扑空間．

因为定义中只牵涉到拓扑性质，連通性是拓扑空間的拓扑性质．从定义还容易証明下列命題．

8.1.1 命題 非連通的拓扑空間的定义中的“开”字可改为“閉”，也可改为“旣开且閉”．

8.1.2 命題 拓扑空間 X 是連通的 $\Leftrightarrow$ 拓扑空間 X 的子集中只有 X 与空集旣开且閉．(复习題．)

例 8.1 連通的拓扑空間与子集的例子．一个点所形成的拓扑空間是連通的．平庸的拓扑空間是連通的．

拓扑空間的空子集是連通的．

拓扑空間 X 只三个点 a, b, c，而它的非空开集只是 $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a\}$．X 是連通的．

例 8.2 非連通的拓扑空間与子集的例子．包含至少二点的离散的拓扑

空間是非連通的,例 8.1 中的 X 的子集$\{b, c\}$是非連通的.

例 8.3 欧几里得直綫 E^1 上的有理点集或无理点集都是非連通的子集.(复习題.)

例 8.4 欧几里得直綫 E^1 是連通的. 用反証法,設 E^1 非連通,因而有一个分解: $E^1=A\cup B$. 設 $a\in A$, $b\in B$. 不妨設 $a<b$. 用 J 表示閉区間$[a, b]$,并且考虑非空集合 $A\cap J$ 与 $B\cap J$. 它們是 E^1 的有界閉集, 因而是列紧的. 然后它們之間的距离 $d>0$ (I§ 4 中习題 1). 用 λ 表示 $B\cap J$ 的下确界; 然后 $a<\lambda$. (为什么 λ 不会是 a?) 命点 $x\in(a, \lambda)$ 使得 $\lambda-x<d$. 点 x 既不 $\in A$, 又不 $\in B$; 这与假設 $E^1=A\cup B$ 矛盾. 所以 E^1 是連通的.

E^1 上的一个开区間(有界的或无界的)与 E^1 同胚. 因为連通性是拓扑性质,所以开区間也是連通的.

8.2 引理 如果拓扑空間 X 是它的两个既开且閉的不相交的子集 A 与 B 的并集, 而且 Y 是 X 的連通子集, 則 $A\cap Y$ 与 $B\cap Y$ 二者之一必是空集.

証明 $A\cap Y$ 与 $B\cap Y$ 也是 Y 的既开且閉的不相交的子集;它們之中必有一个是空集,因为否則 Y 将是非連通的. ▌

下面的两个定理的証明中都用到这个簡单的引理.

8.3 定理 如果 Y 是拓扑空間X的一个連通子集,而且$\{Y_\alpha\}$是 X 的一族連通子集,其每一个成員都与 Y 相交,則 $Y\cup(\bigcup\limits_\alpha Y_\alpha)$ 是連通的.

証明 設 $Y\cup(\bigcup\limits_\alpha Y_\alpha)$ 是它的两个既开且閉的不相交的子集 A 与 B 的并集. 根据引理 8.2, Y 必完全 $\subset A$ 或完全 $\subset B$; 每一个 Y_α 必也如此. 不妨設 $Y\subset A$. 因为 Y 与 Y_α 相交, 每一个 Y_α 也必 $\subset A$; 然后 $Y\cup(\bigcup\limits_\alpha Y_\alpha)\subset A$, 因而也就是 A; 于是 A 非空,而 B 是空集. 从命題 8.1.2 知: $Y\cup(\bigcup\limits_\alpha Y_\alpha)$連通. ▌

由本定理可以推出: 如果拓扑空間 X 的任二点都属于一个連通的子集,則 X 是連通的.

例 8.5 欧几里得空間 E^n 是連通的. 用例 8.4 与本定理.

8.4 定理 如果拓扑空間 X 的子集 Y 是連通的，而且 Y 的閉包 $\overline{Y}$ 的子集 Y_1 包含 $Y(Y_1 \neq Y)$，則 Y_1 也是連通的．特別地 $\overline{Y}$ 也是連通的．

証 明 用反証法，設 Y_1 非連通，因而有一个分解：$Y_1 = A \cup B$，这里 A 与 B 是 Y_1 的非空的不相交的閉子集．根据引理 8.2，Y 的两个子集 $A \cap Y$ 与 $B \cap Y$ 之中必有一个是空集．不妨設 $B \cap Y$ 是空集．然后 $Y \subset A$.

由于 $\overline{Y} \supset Y_1 \supset Y$，$Y_1 - Y$ 的每一点是 Y 的在 X 中的聚点；由于 $Y_1 = A \cup B \supset Y$ 与 $Y \subset A$，有 $Y_1 - Y \supset Y_1 - A = B$，因而非空集 B 的任一点 b 是 Y 的在 X 中的聚点．再者，由于 $X \supset Y_1 = A \cup B \supset Y$，点 b 还是 Y 的在 Y_1 中的聚点；由于 $Y \subset A$，点 b 也是 A 的在 Y_1 中的聚点．但这与假設 A 是 Y_1 中的不交 B 的閉集矛盾．]

例 8.6 欧几里得直綫 E^1 上的閉区間与半开区間（有界的或无界的）都是連通的．

拓扑空間 X 的子集 Y 的連通性是用子空間 Y 的拓扑来定义的（定义 8.1），現在我們要直接用 X 的拓扑来刻划（定理 8.6）．为此我們先引进

8.5 定义 如果拓扑空間 X 的两个子集 A 与 B 都不是空的，而且它們的每一个都与另一个的閉包不相交，即

$$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset,$$

它們就叫作 X 的一对**分离子集**.

8.6 定理 拓扑空間 X 的子集 Y 非連通 $\Leftrightarrow$ 拓扑空間 X 的子集 Y 是 X 的一对分离子集的并集．

証 明 必要性．設 Y 非連通，因而有定义 8.1 中所說的一个分解：$Y = A \cup B$．我們来証明非空的 A 与 B 是 X 的一对分离子集．因为 A 是 Y 的开集，对于 A 的任一点 a，存在 a 在 Y 中的一个邻域 $U_Y(a) \subset A$．根据 Y 作为子空間的定义，存在 a 在 X 中的一个邻域 $U_X(a)$，使得 $U_Y(a) = U_X(a) \cap Y$．因而

$$U_X(a)\cap(A\cup B)=U_X(a)\cap Y=U_Y(a)\subset A.$$

由于 A 与 B 不相交，$U_X(a)\cap B=\emptyset$；这就証明了 $A\cap\overline{B}=\emptyset$，这里 $\overline{B}$ 表示 B 的在 X 中的閉包. 同样地可以証明，如果 $\overline{A}$ 表示 A 的在 X 中的閉包，則 $\overline{A}\cap B=\emptyset$.

充分性. 設 Y 是 X 的一对分离子集 A 与 B 的并集；即 $Y=A\cup B$，其中 A 与 B 非空，而且 $\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\emptyset$（$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都是在 X 中的閉包）. 明显地 $A\cap B=\emptyset$. 剩下要証明的是：A 与 B 都是 Y 的开集. 由于 $A\cap\overline{B}=\emptyset$，$A$ 的任一点 a 有一个在 X 中的邻域 $U_X(a)$，不交 B. 因而 a 在 Y 中的邻域 $U_Y(a)=U_X(a)\cap Y$ 不交 B；然后，由于 $Y=A\cup B$ 以及 $A\cap B=\emptyset$，$U_Y(a)\subset A$，即 A 是 Y 的开集. 同样地可以証明 B 是 Y 的开集. ▌

本証明当然說明了，在 $Y=X$ 的情形时，X 的一对分离子集是 X 的两个非空的不相交的开子集.

8.7 定理 設 $f: X\to Y$ 是从拓扑空間到拓扑空間的映射. 如果 X 是連通的，則 $f(X)$ 也是連通的. 換句話說，連通性在映射下不变.

証 明 作为 Y 的子空間，$f(X)$ 也是拓扑空間. 容易看出，$f: X\to f(X)$ 也是映射. 用反証法，設 $f(X)$ 非連通，因而有一个分解：$f(X)=A\cup B$. 因为 A 与 B 是 $f(X)$ 的非空的不相交的开子集，$f^{-1}(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 也是 X 的开子集（定理 2.4），而且明显地它們非空而且不相交. 于是它們給出 X 的一个分解，与 X 的連通性假設矛盾. ▌

8.8 推論 設 f 是連通的拓扑空間 X 上的一个連續函数. 如果 f 在 X 的某两点 x_0 与 x_1 处的实数值 $f(x_0)$ 与 $f(x_1)$ 不相等，則对于任一个在 $f(x_0)$ 与 $f(x_1)$ 之間的实数 c，存在 X 的一点 x，使得 $f(x)=c$.

証 明 函数 f 是从 X 到欧几里得直綫 E^1 的映射. 容易看出，$E^1-\{c\}$ 非連通，因而有一个分解 $E^1-\{c\}=A\cup B$，这里 A 与 B 是 $E^1-\{c\}$ 的不相交的开集，而且 $f(x_0)\in A$，$f(x_1)=B$. 假設

f 在 X 上不取值 c, 卽 $c\bar{\in} f(X)$. 然后

$$f(X)=(f(X)\cap A)\cup(f(X)\cap B),$$

这里 $f(X)\cap A$ 与 $f(X)\cap B$ 将是 $f(X)$ 的非空的不相交的开集, 卽 $f(X)$ 非連通;这与定理 8.7 矛盾. ▌

本推論是数学分析中的中值定理的推广.

8.9 定义 設 X 是一个拓扑空間, a 与 b 是它的两个点, 而且 $I=\{t|0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是欧几里得直綫上的单位閉区域. 如果映射 $f: I\to X$ 使得 $f(0)=a$, $f(1)=b$,則 f 叫作 X 中的連接 a 与 b 的一条**道路**. 如果对于 X 的任意两点, X 中都有一条連接它們的道路, X 就叫作**道路連通的**.

讀者注意,按照定义, X 中的一条道路是一个映射 $f: I\to X$, 而不是点集合 $f(I)\subset X$. 可能有另一个映射 $f': I\to X$,而且 $f'\neq f$, 但集合 $f'(I)=f(I)$;这时候 f 与 f' 是两条不同的道路.

容易看出, E^n 与 E^1 上的各种区間都是道路連通的, 而且道路連通性在映射下不变.

8.10 定理 道路連通的拓扑空間 X 是連通的.

証 明 用反証法, 設 X 不連通, 因而有一个分解: $X=A\cup B$. 因为 A 与 B 都非空, 可取 A 的一点 a 与 B 的一点 b; 因为 X 道路連通, X 中存在連接 a 与 b 的一条道路 $f: I\to X$. 現在考慮集合 $f(I)$; 对于它有

$$f(I)\subset A\cup B=X,\quad f(I)\cap A\neq\emptyset,\quad f(I)\cap B\neq\emptyset,$$
$$f(I)\cap A\cap B=\emptyset.$$

这就是說 $f(I)$ 有分解: $f(I)=(f(I)\cap A)\cup(f(I)\cap B)$, 卽 $f(I)$ 非連通. 这是矛盾;因为根据例 8.6,区間 I 連通,再根据定理 8.7 集合 $f(I)$ 連通. ▌

例 8.7 連通的拓扑空間不必道路連通. 設 A 是欧几里得平面 E^2 中的图形 $x_2=\sin\left(\frac{1}{x_1}\right)$ 的点, $0<x_1\leqslant 1$, 而且 B 是 x_2 軸上的閉区間 $-1\leqslant x_2\leqslant 1$.

容易証明: $\bar{A}=A\cup B$. A 是連通的,因为它是 x_1 軸上的連通的区間 $(0, 1]$ 的連續象. 根据定理 8.4, $\bar{A}$ 也連通.

但連通的 $\bar{A}$ 不道路連通. 事实上,設 a 与 b 分别是 A 与 B 的点, I 是閉区間 $0\leqslant t\leqslant 1$,而且 $f: I\to\bar{A}$ 是任一单值对应,使得 $f(0)=a$, $f(1)=b$. 然后 f 在区間 I 上必不連續. (习題 5.)

8.11 定义 如果拓扑空間 X 的一个子集 A 是最大的連通子集(卽 A 旣是連通的, 并且又不是 X 的另一連通子集的眞子集), 它就叫作 X 的一个**連通分支**. 如果 A 是 X 的最大的道路連通子集,它就叫作 X 的一个**道路連通分支**.

8.12 定理 拓扑空間 X 的每一个連通子集落在一个連通分支中. X 的一个連通分支是 X 的閉集.

証　明 設 Y 是拓扑空間 X 的一个非空的連通子集,而且 C 是包含 Y 的所有連通子集的并集. 根据定理 8.3, C 連通. 如果 D 是 X 中的包含 C 的最大連通子集, 則 D 也 $\subset C$, 因而 $D=C$. 这就証明了 C 是一个連通分支. 如果 Y 是空集而 X 非空, Y 落在 X 的独点集中而且独点集落在一个連通分支中, 所以 Y 也落在一个連通分支中.

X 的每一分支 C 是連通的, 因而根据定理 8.6, 它的在 X 中的閉包 $\bar{C}$ 也是連通的. 因为 C 的最大性, 所以 $\bar{C}\subset C$, 卽 C 是 X 的閉集. ▌

例 8.8 欧几里得直綫 E^1 上的有理点或无理点所組成的子空間 X 的連通分支都是独点集,但不是 X 的开子集.

习　題

1. 試証: 如果欧几里得直綫 E^1 的一个連通的子集包含至少两个点,它必是一个区間(开,閉,半开,有限,或无穷).

2. 試証: 欧几里得空間 E^n $(n>1)$ 减去一个点是連通的; n 維球

$S^n(n>0)$ 是连通的．

3．试证：拓扑空间 X 是非连通的 $\Leftrightarrow$ 存在一个映射 $f:X\to E^1$，使得 $f(X)$ 恰是 E^1 上两个不同的点．

4．试证：如果连通的度量空间 X 包含至少两个不同的点．则存在映射 $f:X\to[0, 1]$，使得 $f(X)=[0, 1]$．

5．试证例 8.7 中的对应 f 不连续．

6．试证：如果集合 S 是无穷集合而且 τ 是集合 S 上的使得 (S, τ) 是 T_1 空间的最小拓扑（§3 中习题 1），则 (S, τ) 是连通的．

9．映射的扩张与收缩核概念

设 X 与 Y 是拓扑空间，X_0 是 X 的子空间，而且 $f_0:X_0\to Y$ 与 $f:X\to Y$ 是映射．f 是 f_0 的在 X 上的扩张与 f_0 是 f 的在 X_0 上的限制可以仿照定义 I.3.1 来定义．有时可以利用扩张的概念来刻划拓扑空间的性质．例如取 X_0 为 X 的两个不相交的闭子集 A 与 B 的并集 $A\cup B$，取 Y 为实数轴上的单位区间 $I=[0, 1]$，而且定义 $f_0(x)=0$ 或 1 按照 $x\in A$ 或 $\in B$；然后定理 6.3 是说：X 是正规的 $\Leftrightarrow$ 任意两个这种的 A 与 B 所定义的映射 f_0 能扩张成映射 f．又例如取 X 为 I，取 X_0 为 $\{0\}\cup\{1\}$，而且定义映射 f_0 使得 $f_0(0)=a$ 与 $f_0(1)=b$ 为 Y 的两点；然后定义 8.9 是说：Y 是道路连通的，如果 Y 的任意两点 a 与 b 所定义的映射 f_0 能扩张成映射 f．

必须注意，并不是任一映射 $f_0:X_0\to Y$ 都能扩张成映射 $f:X\to Y$ 的．如果以 V^n 与 S^{n-1} 分别表示 n 维实心球与（它的边界）$n-1$ 维球面，则恒同映射 $f_0:S^{n-1}\to S^{n-1}$ 不可能扩张成映射 $f:V^n\to S^{n-1}$．对于 $n=1$，这是明显的；因为 S^0 不连通，而 V^1 连通（参看定理 II.8.7）．$n>1$ 的情形是后面的定理 IV.6.6，而且它还有一个重要的推论（Brouwer 不动点定理 IV.6.7）．

从上面所说的，已经可以看出映射的扩张这概念在拓扑里的重要性．不但如此，代数拓扑的极重要的部分——同伦论，就可以说是专门研究扩张问题的，因为下一节里将说明的同伦概念就可以用映射的扩张来定义．

在本节里我们只能介绍最简单最常用的扩张定理，以及有关的几种收缩核的概念．

我们首先介绍 Tietze 扩张定理，正规空间中闭子集上的连续实函数的扩张定理．它明显地是定理 6.3 中 Урысон 引理的推广．

9.1 定理(Tietze 扩张定理) 如果X是正规空间，A是X的闭子集，而且$[a, b]$是实数轴上的一个闭区间，则任一映射$f_0: A\to[a, b]$都可以扩张成一个映射$f: X\to[a, b]$.

证　明　由于$[a, b]$与$[-1, 1]$同胚，我们只须对区间$[-1, 1]$证明这定理．因为，如果$h: [a, b]\to[-1, 1]$是一个同胚映射，$f_0: A\to[a, b]$是任一映射，而且$g_0=hf_0: A\to[-1, 1]$能扩张成映射$g: X\to[-1, 1]$，则f_0能扩张成映射$f=h^{-1}g: X\to[a, b]$.

设$f_0: A\to[-1, 1]$是映射．以A_1', A_1''分别记由A中满足$f_0(x)\geqslant 1/3$及$f_0(x)\leqslant -1/3$的点所成的集合．从f_0的连续性知道，A_1'与A_1''都是A中的闭集，所以也是X中的闭集，并且它们显然不相交．根据定理 6.3 中的 Урысон 引理，存在X上的一个连续函数$\varphi_1: X\to[-1/3, 1/3]$，使得当$x\in A_1'$时$\varphi_1(x)=1/3$，当$x\in A_1''$时$\varphi_1(x)=-1/3$．容易看出，这时候对于任意$x\in A$，有$|f_0(x)-\varphi_1(x)|\leqslant 2/3$.

第二步，仿照上面的做法，以A_2', A_2''分别记由A中满足$f_0(x)-\varphi_1(x)\geqslant 2/9$与$f_0(x)-\varphi_1(x)\leqslant 2/9$的点所成的集合，它们是$X$中两个不相交的闭集，因而存在$X$上的连续函数$\varphi_2$，使得对于任意$x\in X$，$|\varphi_2(x)|\leqslant 2/9$，并且在$A_2'$上取值$2/9$，在$A_2''$上取值$-2/9$，因而对于任意$x\in A$有$|f_0(x)-\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\leqslant 4/9$.

一次又一次地这样做下去，就能得着 X 上的一串连续函数 φ_n，满足下面两个条件：

1) 对于任意 $x\in X$，$|\varphi_n(x)|\leqslant 2^{n-1}/3^n$，

2) 对于任意 $x\in A$，

$$|f_0(x)-\varphi_1(x)-\cdots-\varphi_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

考虑 X 上的函数 $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n$，它在 $x\in X$ 的值是 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$. 根据 1)，这个级数是收敛的，并且

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1,$$

所以 f 的确是一个从 X 到 $[-1, 1]$ 的函数；根据 2)，当 $x\in A$ 时 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)=f_0(x)$，即 $f_0=f|A$. 剩下要证的是 $f: X\to[-1,1]$ 的连续性.

任意取点 $x\in X$ 及实数 $\varepsilon>0$. 由于 φ_n 的连续性，存在 x 的一个邻域 U_n，使得当 $y\in U_n$ 时，

$$|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|<\varepsilon/2^{n+1}.$$

再者，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}/3^n$ 收敛，故存在自然数 N，使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

于是，$U=\bigcap\limits_{n=1}^{N}U_n$ 是 x 的一个邻域，而且当 $y\in U$ 时，

$$\begin{aligned}
&|f(x)-f(y)|\\
&\quad=\left|\sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)-\varphi_n(y)]+\sum_{n=N+1}^{\infty}\varphi_n(x)-\sum_{n=N+1}^{\infty}\varphi_n(y)\right|\\
&\quad\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|\varphi_n(x)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|\varphi_n(y)|\\
&\quad<\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就是说，x 的邻域 U 在 f 下的象属于 $f(x)$ 的 ε 邻域，即 f 连续. ▮

9.2 推论 设 I^n 是 n 维欧几里得空间 R^n 里的单位方体. 如果 X 是正规空间，而且 A 是 X 的闭子集，则任一映射 $f_0: A\to I^n$ 可以扩张成一个映射 $f: X\to I^n$. ▮

9.3 推论 设 J^ω 是 Hilbert 空间的基本方体(见例I.1.3). 设 X 是正规空间，A 是 X 的闭子集. 则任一映射 $f_0: X\to J^\omega$ 可以扩张成一个映射 $f: X\to J^\omega$. ▮

现在来考虑一类特殊的扩张问题.

9.4 定义 设 A 是拓扑空间 X 的子空间. 如果恒同映射 $1: A\to A$ 能扩张成映射 $r: X\to A$，换句话说，如果存在映射 $r: X\to A$ 使得当 $x\in A$ 时 $r(x)=x$，则 A 叫作 X 的**收缩核**，$r: X\to A$ 叫作一个**收缩映射**或**收缩**.

收缩核的概念虽是映射的扩张的特例，它与一般的扩张问题仍有密切的关系. 我们举一个简单的命题.

9.4.1 命题 A 是 X 的收缩核 $\Leftrightarrow$ 从 A 到任一拓扑空间 Y 的任一映射 $f_0: A\to Y$ 都能扩张到 X 上.

证 明 如果 $r: X\to A$ 是一个收缩映射，则显然 $f_0 r: X\to Y$ 是 f_0 的一个扩张. 充分性的证明留给读者. (复习题.)

有时，我们只需要把一个子空间上的映射扩张到这子空间的一个邻域上去，因而需要下面的邻域收缩核的概念.

9.5 定义 设 X 是拓扑空间，A 是 X 的一个子空间. 如果恒同映射 $1: A\to A$ 能扩张到 A 的在 X 中的某个邻域 U 上，换句话说，如果 A 是它的在 X 中的某个邻域 U 的收缩核，则 A 叫作 X 的**邻域收缩核**(简称 NR).

邻域收缩核与映射在邻域上的扩张也有密切的关系. 让读者

自己写出并证明与命题9.4.1相仿的命题.（复习题.）

例 9.1 X 是任意拓扑空间，A 是由 X 的一个点所组成的子空间，则 A 总是 X 的收缩核.

例 9.2 在 n 维欧氏空间 E^n 中，以 V^n 记闭的单位球体，S^{n-1} 记单位球面，O 记原点，则 V^n 是 E^n 的收缩核，S^{n-1} 是 $E^n-\{0\}$ 的收缩核，也是 $V^n-\{0\}$ 的收缩核. 前面已提过，S^{n-1} 不是 V^n 的收缩核，但它是 V^n 的邻域收缩核.（复习题.）

例 9.3 在环面 T^2 上，以 S_1^1 与 S_2^1 分别记一个经圆与一个纬圆. 则 S_1^1 与 S_2^1 都是 T^2 的收缩核，$S_1^1\cup S_2^1$ 是 T^2 的邻域收缩核.（复习题.）

我们再介绍两个常见的概念.

9.6 定义 能度量化的拓扑空间 Y 叫作一个**绝对收缩核**（简称 AR），如果对于任意度量空间 X 及其闭子集 A，任一映射 $f_0:A\to Y$ 都能扩张到 X 上. 能度量化的拓扑空间 Y 叫作一个**绝对邻域收缩核**（简称 ANR），如果对于任意度量空间 X 及其闭子集 A，任一映射 $f_0:A\to Y$ 都能扩张到 A 的在 X 中的一个邻域上.

这种空间 Y 叫作绝对收缩核或绝对邻域收缩核的原因是，无论以什么方式把 Y 同胚地嵌入一度量空间作闭子空间，它都分别是该空间的收缩核或邻域收缩核. 确切地说，只要度量空间 Z 的闭子集 Z_0 与 Y 同胚，Z_0 就分别是 Z 的收缩核或邻域收缩核. 事实上，以 $h_0:Z_0\to Y$ 记一个同胚映射，则 h_0 能扩张成映射 $h:Z\to Y$ ($h_U:U\to Y$，U 是 Z_0 的邻域). 于是

$$h_0^{-1}h:Z\to Z_0 \quad (h^{-1}h_U:U\to Z_0)$$

是一个收缩映射.

显然，AR 一定是 ANR.

Tietze 扩张定理及推论以及定理 3.4 告诉我们

9.6.1 命题 n 维方体 I^n 及 Hilbert 空间的基本方体 J^ω 都是 AR. ▌

下面的定理使我们能举出更多的 AR 和 ANR 的例子.

9.7 定理 AR 的收缩核仍是 AR；ANR 的邻域收缩核仍是 ANR.

证 明 我们只证后一句话. 设 Y 是 ANR, Y_0 是 Y 的邻域收缩核. 以 $i:Y_0\to Y$, $r:V\to Y_0$ 记包含与收缩映射，这里 V 是 Y_0 的在 Y 中的一个邻域.

设 X 是度量空间，A 是闭子空间，$f_0:A\to Y_0$ 是映射. 则 $g_0=if_0:A\to Y$ 能扩张到 A 的一个邻域 U' 上，成为映射 $g:U'\to Y$. 命 $U=g^{-1}(V)$. 则 U 是 A 的一个邻域. 定义一个映射 $f:U\to Y_0$ 如下：

$$f(x)=rg(x),\quad x\in U.$$

然后 f 是 f_0 的扩张；因为如果 $x\in U$, 则

$$f(x)=rg(x)=rg_0(x)=rif_0(x)=f_0(x).\ ▌$$

9.8 推论 n 维球面 S^n 是 ANR.

证 明 这是因为 $n+1$ 维实心球 V^{n+1} 同胚于方体 I^{n+1}，故是 AR, 而 S^n 是 $E^{n+1}-\{0\}$ 的收缩核，故是 V^{n+1} 的邻域收缩核. ▌

ANR 的重要性是由于许多常见的拓扑空间都是 ANR, 其中最重要的是第二、三编中将讲到的有限多面体.

习 题

1. 试证：Hausdorff 空间的收缩核一定是闭的.

2. 设 A 是拓扑空间 X 的收缩核. 证明：X 紧致 $\Rightarrow A$ 紧致；X 连通 $\Rightarrow A$ 连通.

3. 试证：ANR 的子空间也是 ANR.

4. 设 X 是一个 ANR, 并且 A 是 X 的闭子集. 证明：A 是 X 的邻域收缩核 $\Leftrightarrow A$ 是 ANR.

5. 设 X_1 与 X_2 是两个能度量化的拓扑空间. 证明：积空间 $X_1\times X_2$ 是 AR（或 ANR）$\Leftrightarrow X_1$ 与 X_2 都是 AR（或 ANR）.

6. 试证：AR 一定是道路连通的.

7. 设 X 是紧致 ANR. 证明: X 同胚于 Hilbert 空间的基本方体 J^ω 的一个邻域收缩核.

10. 映射的同伦·拓扑空间的伦型

从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的两个映射 $f_0, f_1: X\to Y$ 的同伦，是拓扑学里一个极端重要的概念. 它有明显的直观意义，刻划出拓扑空间的一个基本性质. 例如 X 是圆周 S^1 时，自然地把 $f_0, f_1: S^1\to Y$ 叫作 Y 中的两条**闭道路**(参看道路的定义 8.9). 这时候 f_0 同伦于 f_1 的直观的说法就是: 闭道路 f_0 能在 Y 中连续地变成闭道路 f_1. 正式的定义如下.

10.1 定义 设 $f_0, f_1: X\to Y$ 是拓扑空间 X 与 Y 之间的映射. 如果存在一个从 X 上的柱形 $X\times I$ (I 是实数轴上的单位闭区间 $0\leqslant t\leqslant 1$) 到 Y 的映射 $F: X\times I\to Y$, 使得 $F(x, 0)=f_0(x)$, $F(x, 1)=f_1(x)$, 对于任意 $x\in X$, 我们就说 f_0 与 f_1 **同伦**, 记作 $f_0\simeq f_1: X\to Y$. 这样的 F 就叫作从 f_0 到 f_1 的一个**同伦**或**伦移**.

我们有时候把 t 理解为时间, 而且把 $F(x, t)$ 写成 $f_t(x)$. 在从 f_0 伦移成 f_1 的任一时刻 t, X 在 Y 中的象是 $f_t(X)$. 应该注意的是, 我们不仅要求, 对于每一时刻 t, $f_t(x)$ 连续地依赖于点 x, 而且要求 $f_t(x)$ 同时连续地依赖于点 x 与时间 t.

如果 $f_0\simeq f_1: X\to Y$, 而且 f_1 是一个常值映射, 即 $f_1(X)$ 是 Y 的一个点, 我们就说 f_0 **零伦**, 有时候把它记作 $f_0\simeq 0: X\to Y$.

本节首先一般地讨论同伦概念, 其次引进空间的伦型的概念, 最后讨论零伦的映射以及有关的可缩空间.

例 10.1 拓扑空间 Y 的道路连通性是说, 对于 Y 的任意两点, Y 中有一条连接它们的道路. 用 P 表示一个点所成的空间时, Y 的道路连通性也就是说, 任意两个映射 $f_0, f_1: P\to Y$ 同伦.

例 10.2　平面区域 Y 的单连通性是说，Y 中任一闭道路 $f:S^1\to Y$ 能在 Y 中收缩成一点；按照定义 10.1，这也就是说 f 零伦.

10.2 定理　在从 X 到 Y 的所有映射组成的集合 Y^X 里，同伦的关系 $\simeq$ 是一个等价的关系.

证　明　要证明同伦关系 $\simeq$ 是 1) 反身的，2) 对称的，3) 传递的.

1) 设 $f:X\to Y$，我们用 $F(x, t)=f(x)$（即用 $(x,t)\to x\to f(x)$）定义映射 $F:X\times I\to Y$. 这是从 f 到 f 的一个伦移；故 $f\simeq f$.

2) 设 $f\simeq g:X\to Y$，而且 $F:X\times I\to Y$ 是从 f 到 g 的一个伦移. 我们用 $F'(x, t)=F(x, 1-t)$ 定义映射 $F':X\times I\to Y$. 这是从 g 到 f 的一个伦移；故 $g\simeq f$.

3) 设 $f\simeq g:X\to Y$，$g\simeq h:X\to Y$，F 是从 f 到 g 的伦移，而且 G 是从 g 到 h 的伦移. 我们定义一个新的映射 $H:X\times I\to Y$：

$$H(x, t)=\begin{cases}F(x, 2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ G(x, 2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

这是从 f 到 h 的一个伦移. ▌

读者必须仔细验证这里所作的各伦移的连续性.（复习题.）在验证 H 的连续性时，用 § 2 的习题 4.

根据这个定理，从 X 到 Y 的映射集合 Y^X 按同伦关系分成若干等价类，每个等价类叫做一个**同伦类**.

例 10.3　设 Y 是欧几里得空间 E^n 的一个凸子集，X 是任意拓扑空间，而且 $f_0, f_1:X\to Y$ 是任意两个映射. 则

$$F(x, t)=(1-t)f_0(x)+tf_1(x)$$

是从 f_0 到 f_1 的一个伦移. 因而集合 Y^X 只有一个同伦类.

例 10.4　设 X 是实数轴上的单位闭区间 I，Y 是度量空间，并且仿照例

I.1.4 引进度量函数使 Y^X 成为度量空间，然后度量空间 Y^X 的两点 f_0, f_1 属于同一个道路连通分支，等价于存在一个伦移 $f_0\simeq f_1:X\to Y$.

例 10.5 如果 X 与 Y 都是拓扑空间，也可以在集合 Y^X 中引进一个拓扑，使得这集合成为拓扑空间．常用的一个拓扑是如下定义的：对于 X 的任一紧致子集 K 与 Y 的任一开集 U，Y^X 中的所有元素 f，使得 $f(K)\subset U$ 的，形成一个子集，记作 $(K;U)$；考虑有限个这种子集的交，这种交的全体组成 Y^X 的一个拓扑基；它诱导出的拓扑，叫做**紧致开拓扑**．如果拓扑空间 X 满足公理 T_2 和 A_1（例如 X 是第二、三编中的有限多面体），那么拓扑空间 Y^X 的两点 f_0, f_1 属于同一个道路连通分支，等价于存在一个伦移 $f_0\simeq f_1$: $X\to Y$.（参看 Fox, R. H., On fopologies for function spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 51 (1945), 429—432.）

映射的同伦还有下面这重要性质：

10.3 定理 如果 $f_0\simeq f_1:X\to Y$，而且 $g_0\simeq g_1:Y\to Z$，则 $g_0f_0\simeq g_1f_1:X\to Z$.

证 明 只要证明

1) $g_0f_0\simeq g_0f_1:X\to Z$ 与

2) $g_0f_1\simeq g_1f_1:X\sim Z$;

然后从定理 10.2 中的 3) 就得到本定理所求证的同伦.

1) 设 $F:X\times I\to Y$，使得 $F:f_0\simeq f_1$. 作 $H=g_0F$，就有 $H:g_0f_0\simeq g_0f_1$.

2) 设 $G:Y\times I\to Z$，使得 $G:g_0\simeq g_1$. 作 $K(x,t)=G(f_1(x), t)$ 对于任意 $(x,t)\in X\times I$. 因为 $(x,t)\to(f_1(x),t)$ 给出 $X\times I\to Y\times I$ 的一个映射，K 是映射并且 $K:g_0f_1\simeq g_1f_1$. ▌

这定理告诉我们，在一个复合映射中如果把若干个因子换成一个同伦的映射，其结果也与原来的复合映射同伦.

附 记 两个已知映射 $f,g:X\to Y$ 的同伦问题实际上是一个映射的扩张问题．我们在 $X\times I$ 的闭子空间 $(X\times 0)\cup(X\times 1)$ 上定义一个映射 $F':(X\times 0)\cup(X\times 1)\to Y$ 如下：$F'(x,0)=f(x)$, $F'(x,1)=g(x)$. 于是

$f\simeq g$ 当且仅当 F' 可以扩张到 $X\times I$ 上.

在代数拓扑学的不少问题里，互相同伦的映射所起的作用完全相同，因而可以不加区别. 在这种问题里，我们能用更广的同伦映射来替代同胚映射. 不仅如此，在这种问题里，我们还能用下面定义的同伦等价的空间来替代同胚的空间.

10.4 定义 如果两个拓扑空间 X 与 Y 之间存在一对映射 $h:X\to Y$, $k:Y\to X$, 使得 $kh\simeq 1:X\to X$, $hk\simeq 1:Y\to Y$, 我们就说 X 与 Y 是**同伦等价的**，或是**具有相同伦型的**，并记作 $X\simeq Y$. 这时候 h 叫作从 X 到 Y 的一个**同伦等价**, k 叫作 h 的一个**同伦逆**, h 与 k 叫作一对**同伦等价**.

注意, k 并不是 h 的逆映射，因为 h 不一定是同胚映射.

显然，同胚的空间一定是同伦等价的. 所以同伦等价这概念是同胚概念的一种推广.

10.5 定理 同伦等价关系 $\simeq$ 是拓扑空间之间的一个等价关系.

证 明 这关系的反身性和对称性是明显的. 现在证明传递性. 设 $X\simeq Y$, $Y\simeq Z$. 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$, 与 $h:Y\to Z$, $k:Z\to Y$ 是两对同伦等价. 考虑 $u=hf:X\to Z$, $v=gk:Z\to X$. 根据定理 10.3, $vu=gkhf\simeq g1f=gf\simeq 1:X\to X$, $uv=hfgk\simeq h1k=hk\simeq 1:Z\to Z$. 所以 $X\simeq Z$. ∎

参看习题 3.

根据这定理，拓扑空间按同伦等价关系分成许多等价类.

以上讨论了映射的同伦与空间的伦型. 现在我们来讨论零伦的映射与可缩的空间. 从同伦的角度来说，最简单的映射是零伦的映射. 最简单的拓扑空间自然是由一个点组成的空间，因而在伦型的意义下，下面所定义的可缩的拓扑空间是最简单的拓扑空间.

10.6 定义 拓扑空间 X 叫作**可缩的**，如果 X 与由一点组成的空间同伦等价.

10.7 定理 拓扑空间 X 是可缩的，当而且仅当恒同映射 $1: X\to X$ 是零伦的.

证 明 以 P 表示由一点组成的拓扑空间. 如果 X 可缩，则有映射 $h: X\to P$, $k: P\to X$, 使得 $kh\simeq 1: X\to X$. 但 kh 是常值映射，故 $1: X\to X$ 零伦. 反过来，如果 $1: X\to X$ 零伦，则有一常值映射 $c: X\to X$, 使得 $1\simeq c: X\to X$. 作 $h: X\to P$ 及 $k: P\to X$, 使得 $k(P)=c(X)$. 于是 $kh=c\simeq 1: X\to X$, $hk=1: P\to P$. 所以 $X\simeq P$. ▌

我们再介绍两个与伦型有密切关系的概念.

10.8 定义 拓扑空间 X 的收缩核 A 叫作 X 的一个**形变收缩核**，如果存在一个收缩映射 $r: X\to A$, 使得 $ir\simeq 1: X\to X$, 这里 i 表示包含映射. 拓扑空间 X 的收缩核 A 叫作一个**强形变收缩核**，如果存在一个收缩映射 $r: X\to A$, 及连接 ir 与 1 的伦移 H, 使得对任一 $x\in A$ 及任意 $t\in I$, $H(x, t)=x$. (参看定义 9.4.)

显然，如果 A 是 X 的形变收缩核或强形变收缩核，则 A 与 X 有相同的伦型，且包含映射 $i: A\to X$ 就是一个同伦等价.

10.9 推论 如果拓扑空间 X 是可缩的，则从 X 到拓扑空间 Y 的任意映射 $f: X\to Y$, 与从拓扑空间 Z 到 X 的任意映射 $g: Z\to X$ 都是零伦的.

证 明 根据上面的定理，$1\simeq c: X\to X$, c 是常值映射. 于是对任意 $f: X\to Y$, $g: Z\to X$, 有 $f=f1\simeq fc: X\to Y$, $g=1g\simeq cg: Z\to X$, 而 fc, cg 都是常值映射. 所以 f, g 都是零伦的. ▌

最后，我们引进锥形的定义，并介绍某些映射零伦的一个充要条件.

设 X 是某 m 维的欧几里得空间 E^m 里的一个紧致子空间. 把

E^m 看成 E^{m+1} 的子空间，而且任取一点 $a\in E^{m+1}-E^m$. E^{m+1} 的子空间

$$\hat{X}=\{\lambda a+(1-\lambda)x \mid x\in X,\ \lambda\in I\}$$

叫作 X 上的一个**锥形**，它以 X 为**底**，以 a 为**顶**.

直观的说，以 X 为底以 a 为顶的锥形就是把 X 的每一点与 a 相连所得诸线段的并集.

有一个自然的映射 $k: X\times I\to\hat{X}$，把柱形映成锥形，它的定义是

$$k(x,\ t)=ta+(1-t)x,\quad (x,\ t)\in X\times I.$$

这确是映射（复习题），它把柱形的底 $X\times 0$ 同胚地映成 X，顶 $X\times 1$ 映成锥形 $\hat{X}$ 的顶 a. 既然 $\hat{X}$ 是紧致空间 $X\times I$ 的连续象，$\hat{X}$ 也是紧致的.

例 10.6 n 维球面 S^n 上的锥形同胚于 $n+1$ 维实心球 V^{n+1}.（复习题.）

10.10 定理 设 X 是 m 维欧几里得空间 E^m 的一个紧致子空间，而且 $f: X\to Y$ 是从 X 到拓扑空间 Y 的映射. 则 f 是零伦的，当而且仅当 f 可以扩张到以 X 为底以 a 为顶的锥形 $\hat{X}$ 上.

证 明 以 $k: X\times I\to\hat{X}$ 记从柱形到锥形的自然映射. 设 $f: X\to Y$ 可扩张成 $\bar{f}: \hat{X}\to Y$. 则显然 $\bar{f}k: X\times I\to Y$ 就是从 f 到一个常值映射的伦移，所以 f 是零伦的.

反过来，设 f 是零伦的. 则存在一个伦移 $F: X\times I\to Y$，使得对于任意 $x\in X$，$F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=y_0$. 定义对应 $\bar{f}: \hat{X}\to Y$ 如下：

$$\bar{f}(\lambda a+(1-\lambda)x)=F(x,\ \lambda),\quad \lambda a+(1-\lambda)x\in\hat{X}.$$

容易验证，$\bar{f}$ 是单值的，并且是 f 的扩张. 下面证 $\bar{f}$ 的连续性.

设 B 是 Y 的任一闭子集. 则不难验证 $\bar{f}^{-1}(B)=kF^{-1}(B)$. 根据 F 的连续性，$F^{-1}(B)$ 是 $X\times I$ 的闭子集；但 X 是紧致的，故

$F^{-1}(B)$ 也是紧致的(参看定理 I.4.5 前的表). 再从 k 的连续性，知 $\bar{f}^{-1}(B)=kF^{-1}(B)$ 是紧致的; 而 $\hat{X}$ 是度量空间, 故 $\bar{f}^{-1}(B)$ 是 $\hat{X}$ 的闭子集(参看定理 I.4.5 前的表). 这说明 $\bar{f}$ 是连续的.]

10.11 推论 设 S^n 是 E^{n+1} 中的单位球面, V^{n+1} 是单位实心球, 而且 $f: S^n\to Y$ 是从 S^n 到拓扑空间 Y 的映射. 则 f 是零伦的, 当而且仅当 f 能扩张到 V^{n+1} 上.]

习 题

1. 设 S^n 是 n 维球面, 而且 $f, g: X\to S^n$ 是从拓扑空间 X 到 S^n 的两个映射, 使得对于任一点 $x\in X$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 总不是对径点. 试证 $f\simeq g: X\to S^n$.

2. 试证: 如果 $f: X\to S^n$ 不是满映射, 即 $f(X)\neq S^n$, 则 f 零伦.

3. 试证: $X\times I$ 与 X 同伦等价; Möbius 带与圆周同伦等价.

4. 试证: 如果 $h: X\to Y$ 是一个同伦等价, 则 h 的所有的同伦逆彼此同伦.

5. 试证: 如果 X 是可缩的空间, 则任意两个从拓扑空间 Z 到 X 的映射都同伦.

6. 试证: 锥形 $\hat{X}$ 是可缩的.

第三章　单純复合形及其同調群

在本章中我們先提出代数拓扑学中所研究的最基本的几何对象——单純复合形及其多面体. 然后从几何性质的考虑，利用群的术語，对于每一个多面体的一个固定的剖分，即对于每一个单純复合形，引进它的同調群. 同調群集中地反映出单純复合形的許多重要的几何性质. 它的拓扑不变性的証明則留待下一章.

1. 单純复合形·多面体

单純形是代数拓扑学中最簡单的几何对象. 单純复合形是由欧几里得空間中的有限个单純形按“規則的”方式拼成的. 单純复合形的点所形成的、欧几里得空間的子空間叫作多面体.

单　純　形*)

設 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 是 n 維欧几里得空間中占有最广位置的一組点(參看定义 A3)，$q \leqslant n$，即向量

$$e^1 = a^1 - a^0,\ e^2 = a^2 - a^0,\ \cdots,\ e^q = a^q - a^0$$

是綫性无关的. 这个最广点組張成一个 q 維超平面 E^q，它的参数方程是

*) 現在需要附录 A 的知識. 但如果讀者已知道三維欧几里得空間(附录 A 中的綫性的欧几里得空間現在与此后都簡称为欧几里得空間)中的斜角坐标系或仿射坐标系，并能推广与运用它来处理 n 維欧几里得空間中的問題(例如得到定理 A5)，則可不讀附录 A，而只參看那里的定义、命題与定理.

$$x = a^0 + \lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \cdots + \lambda_q e^q,$$

或

$$x = a^0 + \lambda_1 (a^1 - a^0) + \lambda_2 (a^2 - a^0) + \cdots + \lambda_q (a^q - a^0).$$

E^n 中的点 x 或向量都有 n 个坐标(我們把它們叫作**直角坐标**，以区别于下面即将提到的斜角坐标)；参数方程实际上是給出 n 个坐标的 n 个方程的簡写. 再者，这 q 个有次序的参数 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q)$ 是 E^q 的点 x 在斜角坐标系 $\{O; e^1, e^2, \cdots, e^q\}$ 中的**斜角坐标**.

在上面的第二个参数方程中，点 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 的地位不对称；为着避免这个缺点，我們用下面两个方程来替代上面的第二个参数方程：

$$x = \lambda_0 a^0 + \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_q a^q, \tag{1}$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_q = 1. \tag{2}$$

这两个式子叫作 E^q 的**对称的参数方程**(参看命題 A2). 这两个式子是根据物理学中的重心概念得来的. 事实上，我們从物理学知道，当 $n=3$，而 q 是任意正整数时，設想在点 a^i 处有一个质量为 $\lambda_i (\geqslant 0)$ 的质点，$i=0, 1, \cdots q$，而且这 $q+1$ 个质量的和为 1 (式(2))，然后这 $q+1$ 个点处的质点的重心恰就是式(1)所給出的点 x. 我們还回到我們所考虑的情况：n 任意，点組 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 占有最广位置，$q \leqslant n$，$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 是滿足式(2)的任意实数. 因为这組点所張成的超平面 E^q 的任一点 x，在斜角坐标系 $\{O; e^1, e^2, \cdots, e^q\}$ 中有唯一的斜角坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q)$，又因为通过式(2)，$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q)$ 与 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ 这二組中的任一組唯一地决定另一組，所以我們有下述命題.

1.1 命題 設 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 是 n 維欧几里得空間 E^n 中占有最广位置的 $q+1$ 个点，$q \leqslant n$，因而它們張成一个 q 維超平面 E^q. E^q 的任一点 x 唯一地决定一組实数 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$，滿足式(1)与(2)；而且反之，这样的一組实数唯一地决定 E^q 的一个点. 因而

这組有次序的 $q+1$ 个实数形成点 x 的在 E^q 中的一种坐标，叫作**重心坐标**，而且这有次序的点組 $\{a^0, a^1, \cdots, a^q\}$ 叫作 E^q 中的一个**重心坐标系**. ∎

本命題是通过斜角坐标証明了的；但也可以直接从最广点組的定义証明如下. 設点 x 还可以由

$$x=\mu_0 a^0+\mu_1 a^1+\cdots+\mu_q a^q, \tag{3}$$

$$\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_q=1 \tag{4}$$

决定. 从式(3)减去式(1)，从式(4)减去式(2)，分别得

$$(\mu_0-\lambda_0)a^0+(\mu_1-\lambda_1)a^1+\cdots+(\mu_q-\lambda_q)a^q=0,$$

$$(\mu_0-\lambda_0)+(\mu_1-\lambda_1)+\cdots+(\mu_q-\lambda_q)=0.$$

但点組 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 最广，故从命題 A4，有 $\mu_i=\lambda_i$, $i=0, 1, \cdots, q$. ∎

1.2 定义 設 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 是 n 維欧几里得空間 E^n 中占有最广位置的 $q+1$ 个点，$q\leqslant n$. 命

$$x=\lambda_0 a^0+\lambda_1 a^1+\cdots+\lambda_q a^q, \tag{1}$$

其中实数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 滿足下列两組条件：

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_q=1, \tag{2}$$

$$\lambda_0\geqslant 0,\ \lambda_1\geqslant 0,\ \cdots,\ \lambda_q\geqslant 0. \tag{5}$$

E^n 中这样的点 x 的集合叫作一个 q 維**单純形**，簡称为 q 維**单形**，記作$(a^0, a^1, \cdots, a^q)$或 $\underline{s}^q$. 点 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 叫作 $\underline{s}^q$ 的**頂点**.

方程(1)与(2)是点組 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 所張成的 q 維超平面 E^q 的对称的参数方程；因而单形 $\underline{s}^q$ 是 E^q 的一个子集. 明显地，零維单形 $\underline{s}^0$ 就是 a^0 这个点，一維单形 $\underline{s}^1$ 就是以不同的两点 a^0 与 a^1 为端点的閉綫段. 用斜角坐标或者用重心的概念，都可以看出，二維单形 $\underline{s}^2$ 是以不共綫的三点 a^0, a^1, a^2 为頂点的閉三角形(区域)，三維单形是以不共面的四点 a^0, a^1, a^2, a^3 为頂点的閉四面体(图1).

滿足式(2)与(5)的$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$也叫作点 x 在 q 維单形 $\underline{s}^q$ 中的重心坐标. 我們常常称点 x 为点 $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$. 頂点

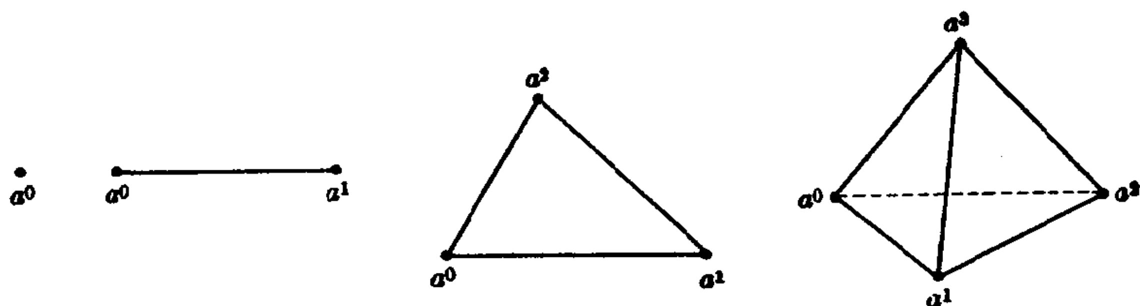


图　1

a^i 的 $q+1$ 个重心坐标中只 $\lambda_i=1$，其他都是零；如果点 x 不是顶点，则它的重心坐标中至少有两个不等于零．以 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_q=(q+1)^{-1}$ 为重心坐标的点 x 就是 $\underline{s}^q$ 的**中心**(或**重心**)；特别地，点 $x=(a^0+a^1)/2$ 是 $\underline{s}^1=(a^0, a^1)$ 的中点．

附　记　重心坐标的另一解释．设 $q+1$ 维欧几里得空间 E^{q+1} 的点 x 在斜角坐标系 $\{0; e^1, e^2, \cdots, e^{q+1}\}$ 中是 $(x_1, x_2, \cdots, x_{q+1})$．如果 $(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 分别是 E^{q+1} 中的单位点 $e^1, e^2, \cdots, e^{q+1}$，则 x 的重心坐标 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)=(x_1, x_2, \cdots, x_{q+1})$．然后(2)是 E^q 在 E^{q+1} 中的方程．

1.3 命题　n 维欧几里得空间 E^n 中的 q 维单形 $\underline{s}^q$ 唯一地决定它的顶点．换句话说，如果 E^n 中的两个单形 $\underline{s}^q$ 与 $\underline{s}_1^p$ 重合，则它的顶点一对一地重合，因而 $p=q$．

证　明　首先证明顶点的下述特征：1) 如果 $\underline{s}^q$ 的点 x 不是顶点，则 x 是以 $\underline{s}^q$ 的某两点为端点的线段的中点；2) 如果 x 是顶点，则 x 不是这样的一条线段的中点．

1) 设式(1)中的 x 不是 $\underline{s}^q$ 的顶点．于是点 x 至少有两个重心坐标不为零；设是 $\lambda_i>0$, $\lambda_j>0$, $i\neq j$．设 ε 是小于 λ_i 与 λ_j 的任意正数．命

$$u^0=x+\varepsilon(a^j-a^i),\quad u^1=x-\varepsilon(a^j-a^i).$$

这两点显然属于 $\underline{s}^q$，而且 $x=(u^0+u^1)/2$．

2) 考虑 $\underline{s}^q$ 的顶点 a^k．用反证法，设 v^0, v^1 是 $\underline{s}^q$ 的不同的两点：

$$v^h=\lambda_0^h a^0+\lambda_1^h a^1+\cdots+\lambda_q^h a^q,\quad h=0,\ 1,$$

而且 $a^k=\dfrac{1}{2}(v^0+v^1)$．既然 v^0 与 v^1 不同，因而决非同一个頂点，故必有两个脚标 $i\neq j$，使得 $\lambda_i^0>0$, $\lambda_j^1>0$．根据假設

$$a^k=\frac{1}{2}(\lambda_0^0+\lambda_0^1)a^0+\frac{1}{2}(\lambda_1^0+\lambda_1^1)a^1+\cdots+\frac{1}{2}(\lambda_q^0+\lambda_q^1)a^q,$$

这里 $\lambda_i^0+\lambda_i^1>0$, $\lambda_j^0+\lambda_j^1>0$；但另一方面

$$a^k=0a^0+0a^1+\cdots+1a^k+\cdots+0a^q.$$

这与命題1.1矛盾．这就証完了頂点的特征．

其次，設 $\underline{s}^q=(a^0,\ a^1,\ \cdots,\ a^q)$，$\underline{s}_1^p=(b^0,\ b^1,\ \cdots,\ b^p)$．因为这两个点集重合，$b^j\in\underline{s}^q$．由剛才証明的頂点的特征，$b^j$ 也是 $\underline{s}^q$ 的一个頂点．同理，每一个 a^i 也是 $\underline{s}_1^p$ 的一个頂点．】

設 $\underline{s}^q=(a^0,\ a^1,\ \cdots,\ a^q)$ 是 E^n 中的一个 q 維单形．設点 a^{i_0}, a^{i_1}, $\cdots$, a^{i_r} 是 $\underline{s}^q$ 的頂点中的任意 $r+1$ 个，$0\leqslant r\leqslant q$；它們是占有最广位置的，因而 E^n 中有 r 維单形 $\underline{s}_1^r=(a^{i_0},\ a^{i_1},\ \cdots,\ a^{i_r})$．$\underline{s}_1^r$ 叫作 $\underline{s}^q$ 的一个 r 維**面**，記作

$$\underline{s}_1^r\prec\underline{s}^q.$$

設 $a^{i_{r+1}},\cdots,\ a^{i_q}$ 为 $\underline{s}^q$ 的頂点，但非 $\underline{s}_1^r$ 的頂点．則在式(1)到式(3)中命

$$\lambda_{i_{r+1}}=\cdots=\lambda_{i_q}=0 \tag{6}$$

时，就得到 $\underline{s}_1^r$ 的任意点 x．所以点集 $\underline{s}_1^r\subset\underline{s}^q$，而 $\underline{s}_1^r$ 在 $\underline{s}^q$ 中是由方程組(6)决定的．反之，任意一組(6)型的方程决定 $\underline{s}^q$ 的一个 r 維面．$\underline{s}^q$ 的零維面就是頂点，一維面也叫作**棱**，q 維面就是 $\underline{s}^q$ 自身．$\underline{s}^q$ 的維数小于 q 的面叫作 $\underline{s}^q$ 的**眞面**．

設 $\underline{s}^q$ 是 E^n 的一个 q 維单形．$\underline{s}^q$ 的重心坐标都是正数的点叫作 $\underline{s}^q$ 的**內点**；$\underline{s}^q$ 的其他点叫作 $\underline{s}^q$ 的**边緣点**．$\underline{s}^q$ 的內点的集合叫作一个 q 維**开单形**．因此单形 $\underline{s}^q$ 也叫作**閉单形**．$\underline{s}^q$ 的边緣点的集合叫做 $\underline{s}^q$ 的**边緣**；它显然是 $\underline{s}^q$ 的全体 $q-1$ 維面的幷集；記作 S^{q-1}．

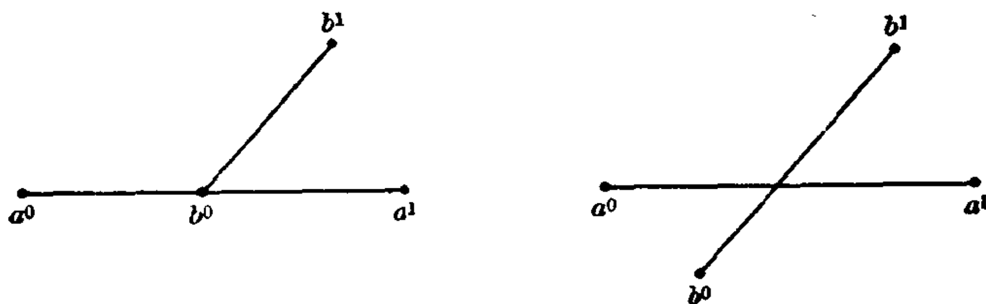
[理由：这里的点集与 $q-1$ 維球(即 E^q 中单位球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_q^2=1$)同胚. 注意,零維球是两个点.]

根据 E^n 中的 q 維超平面的定义,不难驗証下述事实:

从 q 維单形 $\underline{s}^q$ 所得到的 q 維开单形在 E^n 中的閉包就是 $\underline{s}^q$, $\underline{s}^q$ 既然是 E^n 中的一个有界閉集, $\underline{s}^q$ 是列紧的; S^{q-1} 是 $\underline{s}^q$ 的閉子集; 因而 $\underline{s}^q-S^{q-1}$ 是 $\underline{s}^q$ 中的一个开子集.

$\underline{s}^q$ 的頂点也叫作从 $\underline{s}^q$ 得到的 q 維开单形的頂点. 因为这开单形的閉包是閉单形 $\underline{s}^q$, 从命題 1.3 有: q 維开单形也唯一地决定它的頂点.

从面单形的概念我們要引进两个单形的規則地相处这个重要概念. 設 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 是欧几里得空間中两个单形. 如果交 $\underline{s}\cap\underline{t}$ 是空集或是 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 的一个公共面,就說 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ **規則地相处**.



不規則地相处的 $\underline{s}^1=(a^0,a^1)$, $\underline{t}^1=(b^0,b^1)$

图 2

1.4 命題　一个单形的任意两个面規則地相处.

証　明　設 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 是一个单形 $\underline{u}$ 的两个面. $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 在 $\underline{u}$ 中各由一組(6)型的方程决定. 这两組方程联合起来,或者仍形成在 $\underline{u}$ 中的一組(6)型的方程,或者形成在 $\underline{u}$ 中的一組矛盾方程. 如果是后者, 則 $\underline{s}\cap\underline{t}$ 是空集; 如果是前者, 則 $\underline{s}\cap\underline{t}$ 是 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 的一个公共面. 于是 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 規則地相处. ▌

以上用重心坐标定义了单形. 現在要用重心坐标来討論同維

的两个单形之間的映射. 对于 E^n 中任意一个 q 維单形 $\underline{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$, 在 $q+1$ 維欧几里得空間 E^{q+1} 中取一个标准正交基 $e^0, e^1, \cdots, e^q$. 我們把 E^{q+1} 中的 q 維单形 $\underline{t}^q=(e^0, e^1, \cdots, e^q)$ 叫作一个**自然的** q **維单形**. $\underline{t}^q$ 的任意点是

$$y=\lambda_0e^0+\lambda_1e^1+\cdots+\lambda_qe^q,$$

其中 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 还满足式(2)与(5). 因为 $e^0, e^1, \cdots, e^q$ 是标准正交基, $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ 是 y 在 E^{q+1} 中的、对于这个基的直角坐标;另一方面,根据重心坐标的定义, $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ 又是 y 在 $\underline{t}^q$ 中的重心坐标. 故对于 E^{q+1} 中的 $\underline{t}^q$ 而言, $\underline{t}^q$ 的点的这两种坐标一致.

考虑 E^{q+1} 中的 $\underline{t}^q$ 的顶点与 E^n 中的 $\underline{s}^q$ 的顶点之間的自然的一一对应:

$$v: e^i \rightarrow a^i, \quad i=0, 1, \cdots, q.$$

并用

$$f(y)=f\left(\sum_{i=0}^{q}\lambda_ie^i\right)=\sum_{i=0}^{q}\lambda_if(e^i)=\sum_{i=0}^{q}\lambda_iv(e^i)=\sum_{i=0}^{q}\lambda_ia^i=x \qquad (7)$$

来定义对应

$$f: \underline{t}^q \rightarrow \underline{s}^q.$$

这样定义的 f 是 v 的、在 $\underline{t}^q$ 上的綫性扩張. 它保持重心坐标不变, 即 y 与 $f(y)=x$ 有相同的重心坐标 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$.

現在我們要証明 f 是一个拓扑映射. 事实上, 首先由于命題 1.1, f 是一一的而且 $f(\underline{t}^q)=\underline{s}^q$. 其次, 因为在 E^n 中取定的坐标系是直角坐标系, 式(7)說: 点 x 的 n 个直角坐标都是点 y 的 $q+1$ 个重心坐标 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 的綫性函数, 因而是这些重心坐标的連續函数; 再者, 因为点 y 在 $\underline{t}^q$ 中的重心坐标与在 E^{q+1} 中的直角坐标同为 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$, 于是点 $x=f(y)$ 是点 y 的連續函数, 即 f 是映射. 最后, 由于 $\underline{t}^q$ 列紧, f 是拓扑映射(定理 I 5.7). 这个映射 f 叫作(非退化的)**仿射映射**或**保持重心坐标的拓扑映射**. 这就証

明了下述命題.

1.5 命題 欧几里得空間 E^n 中任意一个 q 維单形 $\underline{s}^q$ 与自然的 q 維单形 $\underline{t}^q$ 在保持重心坐标的拓扑映射下同胚. 因此,任意两个 q 維单形在保持重心坐标的拓扑映射下同胚. ▌

E^n 的拓扑(根据距离 d 得来的)是由 E^n 的直角坐标定义的,因而它的子空間 $\underline{s}^q$ 的拓扑也是由 E^n 的直角坐标定义的. 因为 $\underline{t}^q$ 的重心坐标与 $\underline{t}^q$ 作为 E^{q+1} 的子空間时的直角坐标相同,所以命题 1.5 有另一个說法如下:

1.6 命題 如果用自然单形 $\underline{t}^q$ (作为 E^{q+1} 的子空間时)的拓扑,通过保持重心坐标的一一的滿对应,来定义 $\underline{s}^q$ 的一个拓扑,叫作 $\underline{s}^q$ 的重心坐标拓扑,则 $\underline{s}^q$ 的重心坐标拓扑就是 $\underline{s}^q$ (作为 E^n 的子空間时)的拓扑. ▌

根据命題 1.1, 我們只知道 $\underline{s}^q$ 的点与它在 $\underline{s}^q$ 中的重心坐标成一一对应. 根据命題 1.6 或 1.5, 在研究 $\underline{s}^q$ 的拓扑性质时,我們才可以用 $\underline{s}^q$ 的点的、在 $\underline{s}^q$ 中的重心坐标来替代 $\underline{s}^q$ 的点的在 E^n 中的直角坐标.

設 $\underline{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 与 $\underline{t}^q=(b^0, b^1, \cdots, b^q)$ (不必是上面所說的自然单形)分別是欧几里得空間 E^n 与 E^m 中的两个 q 維单形,而且 $v: a^i \to b^i$, $i=0, 1, \cdots, q$, 是它們的頂点間的自然的一一对应. 根据命題 1.5 的第二个結論,我們可以談 v 的綫性扩張:

$$f(\lambda_0 a^0+\lambda_1 a^1+\cdots+\lambda_q a^q)=\lambda_0 b^0+\lambda_1 b^1+\cdots+\lambda_q b^q.$$

$f: \underline{s}^q \to \underline{t}^q$ 是保持重心坐标的拓扑映射. 再設 $\underline{s}_1^r=(a^{i_0}, a^{i_1}, \cdots, a^{i_r})$, $\underline{t}_1^r=(b^{i_0}, b^{i_1}, \cdots, b^{i_r})$, $r \leqslant q$, v_1 是 v 在 $\underline{s}_1^r$ 的頂点集上的限制,而且 $f_1: \underline{s}_1^r \to \underline{t}_1^r$ 是 v_1 的綫性扩張. 然后明显地有下述命題.

1.7 命題 設 $\underline{s}^q$ 与 $\underline{t}^q$ 是任意两个 q 維单形, v 是 $\underline{s}^q$ 的頂点到 $\underline{t}^q$ 的頂点的自然的一一对应, v_1 是 v 的在 $\underline{s}^q$ 的面单形 $\underline{s}_1^r$ 的頂点集上的限制. 則 v_1 的綫性扩張 f_1 是 v 的綫性扩張 f 的在 $\underline{s}_1^r$ 上的限制. ▌

单 純 复 合 形

1.8 定义 設 K 是一个以 n 維欧几里得空間 E^n 中的单形为

元素的有限集合. 如果 K 满足下列两个条件,則它叫作一个单純复合形,或者在不会引起混淆时,簡单地叫作一个**复形**:

1° 如果单形 $\underline{s}$ 属于 K, 則 $\underline{s}$ 的任一面单形也属于 K;

2° K 的任意两个单形規則地相处.

复形的零維单形叫作**复形的頂点**. 复形的諸单形的維数的最大值叫作**复形的維数**. 如果复形 $L\subset$ 复形 K, 則 L 叫作 K 的一个**子复形**.

1.9 定义 設 K 是 n 維欧几里得空間中的一个复形. K 的全体单形的全体点所形成的空間叫作一个**多面体**,記作 $|K|$. K 叫作 $|K|$ 的一个**单純剖分**或**三角剖分**,或者在不会引起混淆时,簡单地叫作 $|K|$ 的一个**剖分**.

一般的多面体显然有不同的单純剖分.

如果点 $x\in|K|$, 則 x 必属于 K 中某些单形; 其中最低維的含有 x 的单形只有一个, 叫作点 x 的在 K 中的**承載单形**, 記作 $\mathrm{Car}_K x$. 点 x 的在它的承載单形中的重心坐标都 >0.

設 $\underline{s}^q$ 是 E^n 中一个单形. 它的全体面或全体真面各形成一个复形,分别叫作它的**閉包复形**或**边緣复形**,記作 $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^q$ 或 $\mathrm{Bd}\,\underline{s}^q=\dot{\underline{s}}^q$. 为簡单起見, $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^q$ 有时候也記作 $\underline{s}^q$. 显然 $\dot{\underline{s}}^q$ 是 $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^q$ 的子复形, $|\mathrm{Cl}\,\underline{s}^q|=\underline{s}^q$, $|\dot{\underline{s}}^q|=S^{q-1}$.

設 K 是一个复形. K 的全体維数 $\leqslant q$ 的单形形成 K 的一个子复形, 叫作 K 的 q 維**骨架**, 記作 K^q. 設 $\underline{s}^q$ 是 K 的一个单形. K 中以 $\underline{s}^q$ 为面的全体单形以及它們的面形成 K 的一个子复形, 叫作 $\underline{s}^q$ 在 K 中的**閉星形**,記作 $\mathrm{St}_K\,\underline{s}^q$ 或 $\mathrm{St}\,\underline{s}^q$.

E^n 既然是一个度量空間, 它的子空間 $|K|$ 也是一个度量空間; $|K|$ 既然是有限个列紧子集的并集,它所以也是列紧的.

設 K 与 L 是两个复形,而

$$f:|K|\to|L|$$

是把多面体$|K|$映射到多面体$|L|$的一个映射．此后为簡便起見，我們也說f是把复形K映射到复形L的一个映射，記作

$$f:K\to L.$$

設K与L是两个复形．如果K的全体頂点a^i与L的全体頂点b^j之間存在一个一一对应（因而K与L的頂点数相同，設是$r+1$个）：

$$a^i\leftrightarrow b^i,\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ r,$$

使得$(a^{i_0},\ a^{i_1},\ \cdots,\ a^{i_q})$是$K$的一个$q$維单形，当而且只当$(b^{i_0},\ b^{i_1},\ \cdots,\ b^{i_q})$是$L$的一个$q$維单形，我們就說$K$与$L$是**同构的复形**．显然复形的同构是一个等价关系，它把全体复形分为若干**同构类**．我們把复形K与L同构記作$K\cong L$．下面的定理是本节中的主要定理．

1.10 定理　如果两个复形K与L同构，則它們的多面体同胚；用記号表示时，即如果$K\cong L$，則$|K|\cong|L|$．

証　明　本定理是下面的引理的明显推論．】

1.11 引理　設K是具有$r+1$个頂点的复形，而且$\underline{t}^r$是$r+1$維欧几里得空間E^{r+1}中的自然的r維单形．則閉包复形$\mathrm{Cl}\,\underline{t}^r$中有一个子复形$N$与$K$同构，而且多面体$|N|$与$|K|$同胚．

証　明　設自然的r維单形$\underline{t}^r$的頂点是e^i，$i=0,\ 1,\cdots,\ r$．設K在E^m中．把K的$r+1$个頂点任意地排一个次序，把它們記作a^i．然后建立$\underline{t}^q$的頂点与K的頂点之間的下面的一一的滿对应

$$v:\ e^i\to a^i.$$

只考慮$\mathrm{Cl}\,\underline{t}^r$中的那些单形$\underline{t}^q$，它的全体頂点的象也是$K$中的一个单形的全体頂点；我們把这些单形$\underline{t}^q$的全体記作$N$．根据命題1.4，容易看出$N$是一个复形，而且根据$N$的作法，$N$显明

地与 K 同构.

自然单形 $\underline{t}^r$ 的任一点

$$y=\lambda_0e^0+\lambda_1e^1+\cdots+\lambda_re^r,$$

这里的 $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ 是 $\underline{t}^r$ 中的重心坐标，也是 E^{r+1} 中的直角坐标. N 的点 y 也有在 $\underline{t}^r$ 中的坐标 λ. 如果 N 的点 y 属于 N 的一个单形 $\underline{t}^q$, y 的这組坐标 λ 当然一般地不是点 y 的在这单形 $\underline{t}^q$ 中的重心坐标，而是后者加上若干个零(参看图 3). 我們下面的証明中要重复地引用这个事实.

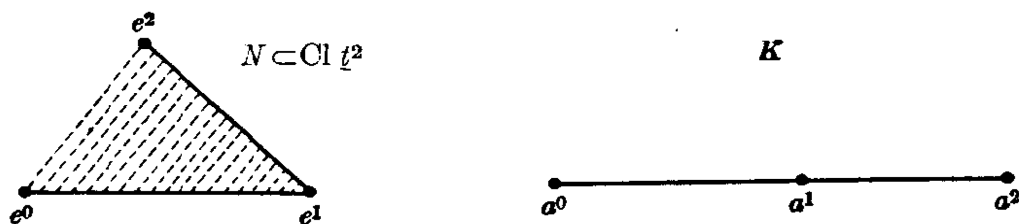


图 3　$r=2$

对应 v 仍旧是复形 N 的頂点到 K 的頂点之間的一个一一的滿对应. 仿照命題 1.5 的証明，我們先形式地作 v 的在 $|N|$ 上的綫性扩張:

$$f(y)=f\left(\sum_{i=0}^{r}\lambda_ie^i\right)=\sum_{i=0}^{r}\lambda_if(e^i)=\sum_{i=0}^{r}\lambda_ia^i,\ y\in|N|.$$

我們現在要推广命題 1.5 的証明方法,来証明

$$f:N\to K$$

是拓扑映射.

首先,設 $\underline{t}^q$ 是 N 的任一单形，而且在同构下它的对应单形是 K 中的单形 $\underline{s}^q$. 根据上述的事实与命題 1.5,

$$f|\underline{t}^q:\ \underline{t}^q\to\underline{s}^q$$

是保持重心的拓扑映射.

其次, f: $N\to K$ 是单值对应. 設复形 N 的单形 $\underline{t}_1$ 与 $\underline{t}_2$ 的交

$\underline{t}=\underline{t}_1\cap\underline{t}_2$ 非空，而且点 $y\in\underline{t}$. 根据命题 1.7，

$$(f|\underline{t}_1)|\underline{t}=f|\underline{t}=(f|\underline{t}_2)|\underline{t};$$

而且根据上述的事实，$(f|\underline{t}_1)(y)$ 与 $(f|\underline{t}_2)(y)$ 是同一个点 $(f|\underline{t})(y)$.

其次，因为 N 的全体单形組成 $|N|$ 的一个閉复盖，根据 II § 2 中的习题 4，与已証明的結果，由全体 $f|\underline{t}^q$ 拼合成的 $f:N\to K$ 是映射．它是满映射；这是明显的．

其次，我們来証明 $f:N\to K$ 是一一的映射．設 λ 与 μ 是 N 的两点，它們的象点相同：

$$f\Big(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i e^i\Big)=f\Big(\sum_{i=0}^{r}\mu_i e^i\Big).$$

如果点 λ 与点 μ 的承載单形分别是

$$\underline{t}_1^h=(e^{i_0},\ e^{i_1},\ \cdots,\ e^{i_h}),\quad \underline{t}_2^k=(e^{j_0},\ e^{j_1},\ \cdots,\ e^{j_k})$$

（这里的頂点的次序是按照 $\underline{t}^r$ 的写下的），则它們的象单形分别是

$$\underline{s}_1^h=(a^{i_0},\ a^{i_1},\ \cdots,\ a^{i_h}),\quad \underline{s}_2^k=(a^{j_0},\ a^{j_1},\ \cdots,\ a^{j_k})$$

（这里的頂点的次序是按照 K 的写下的），而且它們有一个公共的内点 $f(\sum\lambda_i e^i)=f(\sum\mu_i e^i)$；因而根据复形 K 的性质 2°，$\underline{s}_1^h=\underline{s}_2^k$ 而且

$$(i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i_h)=(j_0,\ j_1,\ \cdots,\ j_k).$$

这就表明了 $\underline{t}_1^h=\underline{t}_2^k$. 然后根据 $f|\underline{t}_1^h:\underline{t}_1^h\to\underline{s}_1^h$ 是拓扑映射，点 λ 与 μ 是同一个点．

最后，因为 $|N|$ 是列紧的，$f:N\to K$ 是拓扑映射．】

本引理的証明給出一个很有意义的事实：N 的点 y 的、在 $\underline{t}^r$ 中的重心坐标 $\lambda=(\lambda_0,\ \lambda_1,\cdots,\ \lambda_r)$ 可以看作是 K 中的象点 $x=f(y)$ 的坐标，即 K 的任一点 x 有唯一的表示

$$x=\lambda_0a^0+\lambda_1a^1+\cdots+\lambda_ra^r,$$

这里的 λ 限制在 N 上．然后，我們立刻推出，任意两个同构的复形 K 与 L 不但同胚（如定理 1.10 所說的），而且在保持它們的这种坐标不变的对应下同胚．

如果复形 K 具有 $r+1$ 个頂点，引理 1.11 中所說的、K 的同构复形 N 是在 $r+1$ 維欧几里得空間中的．現在我們要証明一条更为深刻的定理 1.13．

先証明下述引理作为准备工作：

1.12 引理 对于任意給定的正整数 m，n 維欧几里得空間 E^n 中存在一組 m 个点，其中任意 $q+1$ 个点（$q\leqslant n$）都在 E^n 中占有最广位置（定义 A3）．

証 明 用归納法．假設已經取定 E^n 中的 k 个点 $p^1, p^2, \cdots, p^k$，其中任意 $q+1$ 个点（$q\leqslant n$）在 E^n 中占有最广位置；特别地，其中任意 q 个点决定 E^n 中一个 $q-1$ 維的超平面（定理 A5）．因为从这 k 个点所得出的这些超平面只有有限个，而且它們的維数至高是 $n-1$，我們能既在这些超平面之外，又在 E^n 中，取第 $k+1$ 个点 p^{k+1}．容易看出，如此取定的 $k+1$ 个点 $p^1, p^2, \cdots, p^{k+1}$ 中的任意 $q+1$（$q\leqslant n$）个点还都在 E^n 中占有最广位置．】

1.13 定理 任意一个 n 維的复形 K 与 $2n+1$ 維的欧几里得空間 E^{2n+1} 中的一个复形 L 同构；而且 L 的頂点可以是 E^{2n+1} 中任意一組点，只要这組点的任意 $q+1$ 个（$q\leqslant 2n+1$）在 E^{2n+1} 中占有最广位置．

証 明 設 $a^0, a^1, \cdots, a^r$ 是 K 的全体頂点．根据引理 1.12，能在 E^{2n+1} 中取点 $b^0, b^1, \cdots, b^r$，使得其中任意 $q+1$ 个（$q\leqslant 2n+1$）在 E^{2n+1} 中占有最广位置．命 a^i 与 b^i 对应．

現在，如果 $(a^{i_0}, a^{i_1}, \cdots, a^{i_q})$ 是 K 的任一 q 維单形 $\underline{s}^q$，則 $q\leqslant n$．这些頂点的对应点 $b^{i_0}, b^{i_1}, \cdots, b^{i_q}$ 在 E^{2n+1} 中所以占有最广位置，因而 E^{2n+1} 中有一个 q 維单形 $\underline{t}^q=(b^{i_0}, b^{i_1}, \cdots, b^{i_q})$．我們証明 E^{2n+1} 中全体这些单形 $\underline{t}^q$ 形成一个复形 L．首先，因为复形 K 的条件 1°，L 滿足复形的条件 1°．其次，設 $\underline{t}_1^h$ 与 $\underline{t}_2^k$ 是 L 的任意两个单形，而且它們共有 $q+1$ 个不同的頂点 $u^0, u^1, \cdots, u^q$．因为 $h\leqslant n$，$k\leqslant n$，所以 $q\leqslant 2n+1$．因此这 $q+1$ 个頂点在 E^{2n+1} 中占有最广位置，决定 E^{2n+1} 中的一个单形 $\underline{t}_3^q=(u^0, u^1, \cdots, u^q)$．$\underline{t}_3^q$ 未必属于 L，但 $\underline{t}_1^h$ 与 $\underline{t}_2^k$ 都是 $\underline{t}_3^q$ 的面，所以規則地相处（命題 1.4），卽 L 滿足复形的条件 2°．于是 L 是一个复形．而且由于 L 的作法，L 与 K 同构．】

这条定理只說任意一个 n 維复形同构于 E^{2n+1} 中的一个 n 維复形，而未說某些特殊的 n 維复形不能同构于 E^{2n} 中一个 n 維复形．討論 n 維复形能同构于在低于 $2n+1$ 維的欧几里得空間中的一个 n 維复形的充要条件，就是一个广泛而有意义的問題．例如一維的复形总同构于 E^3 中的一个一維复形，而只在某种条件下才同构于 E^2 中的一个．

为着扩大多面体在几何图形中所占的范圍，我們引进一个較广的概念：弯曲的单純复形(或弯曲的复形)与弯曲的多面体，而把以前所說的复形与多面体叫作**平直的**.

如果一个拓扑空間 P 与一个平直的多面体 $|K|$ 同胚，则 P 叫作一个**弯曲的多面体**. 設 s^q 是 K 的任一个 q 維单形. P 的子空間在这同胚下与 s^q 对应的就叫作一个 q 維的**弯曲单形**. 全体这种弯曲单形叫作一个**弯曲的单純复形**；我們說它是 P 的一个**单純剖分**. 如果同胚是 $f: |K| \to P$，有时候为明确起見，把 P 的这个剖分記作 (f, K) 剖分. 例如 P 是欧几里得空間 E^{n+1} 中以原点为中心的单位球 S^n；取 s^{n+1} 为 E^{2n+1} 中以原点为中心的一个 $n+1$ 維单形，取它的边緣复形 $\dot{s}^{n+1}$ 为 K；取 f 为以原点为中心的中心射影. S^n 就从 $\dot{s}^{n+1}$ 得到一个剖分.

拓扑学的目的是研究几何图形的拓扑性质. 从拓扑学的观点看来，P 与 $|K|$ 是无区别的. 所以如果只限于討論平直的多面体的拓扑性质，实际上也就討論了弯曲多面体的拓扑性质.

平直的多面体 $|K|$ 的单純剖分 K 的另一个限制是：在定义 1.8 中复形 K 是有限集合. 如果只把"有限集合"改为"有限的或可数的无穷的集合"而把所得到的复形分别叫作有限的或无穷的复形，則复形的范圍就有实质上的扩大. 但我們根据下列考虑，在本书中仍只限于有限的、平直的(或弯曲的)复形以及它們所决定的多面体. 第一，这种多面体已經包括几何学及分析学中一些最常出現的空間. 第二，这种多面体比較易于通过复形来直观理解，而直观理解是掌握代数拓扑学中的理論与方法的主要途徑. 第三，这种多面体的代数拓扑学是更广义的空間的代数拓扑学的模型，初学者必須从前者入手，然后再进而到更广义的空間.

此后凡提到复形与多面体，如无相反的声明，都是指平直的.

复形的例子

引理 1.11 中的复形 N 是从复形 K 与一个特殊单形 t^r 作出的. 为举例方便起見，我們进一步抽象，用下述的頂点表来描写 N.

1.14 定义 設給定了一个非空的有限点集 S（相当于 N 的或 t^r 的頂点集），而且把 S 的某些子集（相当于 N 的諸单形的頂点集）叫作指定的子集. 如果 S 与它的指定的子集满足下列两个条件：

1° S 的每一点所形成的独点集都是一个指定的子集：

2° S 的每一个指定的子集的一个非空的子集还是一个指定的子集.

我們就把 S 和它的指定的子集的全体叫作一个**頂点表**，記作 V：把含有 $q+1$ 个点的指定的子集叫作一个 q 維单形，零維单形叫作頂点.

容易看出，任一个 N 决定一个 V，卽决定 S 与它的指定的子集（分别是 N 的頂点集与 N 的諸单形的頂点集）；每一个 V 是由一个 N 决定的；而且决定同一个 V 的若干个 N 互相同构. 于是一个頂点表 V 可以看作是复形的一个同构类. 如果复形 N 是 n 維的，它所决定的頂点表 V 也叫作 **n 維的**頂点表. 同构于 N 的任一单純复形都叫作 N 所决定的頂点表 V 的一个**几何实現**；V 也叫作它的任一几何实現的頂点表.

利用頂点表，可以比較方便地給出复形的例子，先看 §4 中的图 6、7、8、10、12、13 中的二維复形（这些图中的箭头对于現在来說，是不必要的）. 严格地說，只有图 7 中的复形才是平直的复形，图 6 中的是弯曲的复形，而图 8 中的既不是平直的复形，又不

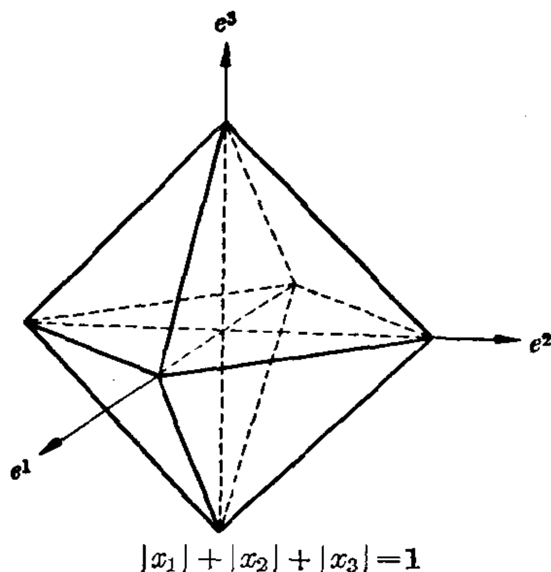
是弯曲的复形．但我们可以把这些图中的每一个理解为一个顶点表，它所代表的同构类中的任一平直复形理解为这图所给出的复形．例如图 6、7、8 给出同一个顶点表，它代表图 7 所给出的复形 K 以及其他同构的平直复形．

现在要说明欧几里得空间 E^{n+1} 中的单位球

$$S^n: x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$$

的另一个单纯剖分 K，一个 n 维复形．

S^n 与 $n+1$ 维单形 $\underline{s}^{n+1}$ 的边缘复形 $\dot{\underline{s}}^{n+1}$ 的多面体 $|\dot{\underline{s}}^{n+1}|$ 同胚．例如在 $n=2$ 时，如果 $\dot{\underline{s}}^3$ 是以欧几里得空间 E^3 的原点为中心的、内接于 S^2 的正四面形，经过中心射影把 $\dot{\underline{s}}^3$ 影射到 S^2 上去，我们就得到 S^2 的一个弯曲的剖分，叫作 S^2 的**四面形剖分**．如果用以 E^3 的原点为中心的、内接于 S^2 的正八面形（图 4）替代正四面形 $\dot{\underline{s}}^3$，则我们得到 S^2 的另一个弯曲的剖分，叫作 S^2 的**八面形剖分**．从 $n=2$ 推广到 n，S^n 也有推广的“四面形剖分”与“八面形剖分”．前者就是从 $\dot{\underline{s}}^{n+1}$ 得到的，是我们比较熟悉的；我们现在要说明的 S^n 的另一个剖分 K 就是后者．



$|x_1|+|x_2|+|x_3|=1$

图 4

设 $e^1, e^2, \cdots, e^{n+1}$ 是 E^{n+1} 中的一个标准正交基．考虑下列 $n+1$ 个点：

$$\varepsilon_1 e^1,\ \varepsilon_2 e^2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n+1} e^{n+1},\ \varepsilon_i=\pm 1. \tag{8}$$

它们决定 E^{n+1} 中的一个 n 维单形．式(8)中的正负号一共有 2^{n+1} 个不同的组合，所以式(8)也给出同样多的 n 维单形．两个这样的

单形的交集或者是一个公共面，由它們的公共頂点所决定；或者是空集. 在后者的情形下，一个单形的、在式(8)中的正負号必与另一个单形的完全相反. 不难看出，这 2^{n+1} 个 n 維单形以及它們的全体面形成 E^{2n+1} 中的一个平直的复形 K'，而且中心射影是 $|K'|$ 到 S^n 的一个同胚. K' 的在 S^n 上的同胚象就是我們的 S^n 的、推广的八面形剖分 K.

这个剖分 K 对于原点是对称的；这就是說，下列映射

$$x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2,\ \cdots,\ x_{n+1}' = -x_{n+1}$$

把 K 的每一个单形变成 K 的一个单形.

迭合 $n(\geqslant 1)$ 維球 S^n 的每对对徑点，就得到 n 維的**射影空間** P^n. 由于 S^n 的“八面形”剖分 K 的对称性质，在第四章 §3 中說明“重心重分”之后，我們将看出，K 的重心重分給出 P^n 的一个单純剖分.

习　題

1. 設 b^i 都是一个单形 s^q 的点，$i=0, 1, \cdots, r$. 試証：

$$b = \sum \mu_i b^i,\ \mu_i \geqslant 0, \quad \sum \mu_i = 1$$

也是 s^q 的点.

2. 設 b^i 都是一个单形 s^q 的点，$i=0, 1, \cdots, r$. 試証：如果

$$b = \sum \mu_i b^i,\ \mu_i > 0, \quad \sum \mu_i = 1$$

是 s^q 的一个頂点 a^0，則每一点 b^i 也是頂点 a^0.

3. 設 N 是 $\mathrm{Cl}\ s^q$ 的一个子复形，而且 b^i 都是 $|N|$ 的点. 試証：

$$b = \sum \mu_i b^i,\ \mu_i > 0, \quad \sum \mu_i = 1$$

是 $|N|$ 的点，当而且只当 b^i 都是 N 的同一个单形的点.

4. 試說明图 13 中的射影平面减去中心三角形的內点是一个 Möbius 带.

5. 設复形 K 是复形 s^5 的二維骨架. 試說明 K 是两个射影平面(参看

图 13) 拼成的.

6. 試給出三个圓周的乘积的一个单純剖分.

[提示: 图 12 中的环面是两个圓周的乘积.]

2. 同　調　群*)

复形是几何对象，而群是代数对象. 从复形过渡到它的同调群的关鍵是单形的定向与边緣运算这两个概念，因而同調群集中地反映出复形的、有关边緣的几何性质.

本节需要附录 B §1 中的知識与 B §1 以后的两个定义 B3.1 与 B2.6.

一个 q 維单形 $\underline{s}^q$ 的 $q+1$ 个頂点 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 有 $(q+1)!$ 个不同次序的排列. 在 $q>0$ 时，这些排列分成两組: 同一組的任意两个排列相差偶数个对换，不同組的任意两个排列相差奇数个对换†). 这两組叫作 $\underline{s}^q$ 的两个**定向**. 指定了一个定向的单形就叫作一个**有向单形**; 为着区别起見，§1 中的单形 $\underline{s}^q$ 就叫作**无向单形**. 例如頂点的下述次序

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ \cdots,\ a^q;\quad a^1,\ a^0,\ a^2,\ \cdots,\ a^q$$

就規定了这两个定向，相应的两个有向单形分别用

$$a^0a^1a^2\cdots a^q,\quad a^1a^0a^2\cdots a^q$$

表示(注意: 頂点之間无逗号!); 如果把一个記作 s^q，則另一个記作 $-s^q$ (注意: s^q 下无横杠!):

$$a^0a^1a^2\cdots a^q=-a^1a^0a^2\cdots a^q;$$

而且把它們叫作**定向相反的**有向单形.

零維无向单形 $\underline{s}^0=(a^0)$ 的一个頂点只有一个排列. 为着叙述

---

*) 根据教学經驗，在本节前系統地讲授附录 B §§ 1～3，效果可能好些.

†) 張禾瑞、郝鈵新，高等代数，人民教育出版社，1964，12～16 頁.

統一起見，我們用＋号与－号来定义它的两个定向；这两个有向单形是 $+a^0$ 与 $-a^0$.

一維的有向单形 $s^1=a^0a^1$ 与 $-s^1=a^1a^0$ 是定向相反的有向綫段；二維有向单形 $s^2=a^0a^1a^2$ 与 $-s^2=a^1a^0a^2$ 是定向相反的有向三角形.

无向单形 $\underset{=}{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 有 $q+1$ 个 $q-1$ 維面 $\underset{=}{t}_i^{q-1}=(a^0, \cdots, \hat{a}^i, \cdots, a^q)$，这里的記号表示只有 a^i 不是 $\underset{=}{t}_i^{q-1}$ 的頂点. $\underset{=}{t}_i^{q-1}$ 叫作 $\underset{=}{s}^q$ 的、**与頂点 a^i 相对的** $q-1$ 維面. 如果 $s^q=a^0a^1\cdots a^q$, 則 $s^q=(-1)^ia^ia^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^q$；我們把

$$t_i^{q-1}=(-1)^ia^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^q \tag{1}$$

与 $-t_i^{q-1}$ 分別叫作 s^q 的 $q-1$ 維的**順向面**与**逆向面**. t_i^{q-1} 是 s^q 的順向面或逆向面，不依賴于給出 s^q 的定向的排列 $a^0, a^1, \cdots, a^q$. 事实上，如果

$$s^q=a^0\cdots a^i\cdots a^q=b^0\cdots b^j\cdots b^q,$$

而且 $a^i=b^j$, 則

$$s^q=(-1)^ia^ia^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^q=(-1)^jb^jb^0\cdots\hat{b}^j\cdots b^q;$$

因而

$$t_i^{q-1}=(-1)^ia^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^q=(-1)^jb^0\cdots\hat{b}^j\cdots b^q.$$

再者，如果 t_i^{q-1} 是 s^q 的順向面或逆向面，則 $-t_i^{q-1}$ 也分別是 $-s^q$ 的順向面或逆向面.（复习題.）

例 順向面的几何意义. 如果有向三角形 $s^2=a^0a^1a^2$ 的定向用边上的箭头或环形箭头表示，則边上的箭头也表示順向棱的定向(图 5).

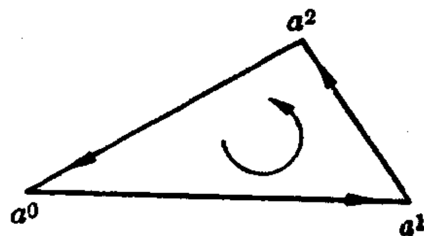


图 5

无向单形 $\underset{=}{s}^q$ 的一个 r 維面所給出的任一有向单形 s^r 也叫作有向单形 s^q 的一个 r 維面，記作

$$s^r\prec s^q.$$

設 K 是一个 n 維复形. 把它的全体 q 維无向单形任意地記作

$$s_i^q,\quad q=0,1,\cdots,n;\quad i=1,2,\cdots,\alpha_q.$$

在 $q=0$ 时，命 $s_i^0=+a^i$，这里的 $\{a^0, a^1, \cdots, a^{\alpha_0}\}$ 是 K 的全体頂点；在 $q>0$ 时，命 s_i^q 为s_i^q 所給出的两个定向单形中任意地选定的一个.（注意:这里的 s_i^{q-1} 并非如式(1)中的 t_i^{q-1} 那样，从某一个 s^q 得来的.）这样的一組 $\{s_i^q\}$ 此后常常需要；为方便起見，把它叫作 K 的有向单形的一个**基本組**. $\pm s_i^q$ 都叫作 K 的有向单形.

n 維复形 K 的 s_i^q 与 s_j^{q-1} 有下列三种可能的关系：s_j^{q-1} 不是 s_i^q 的面，是 s_i^q 的顺向面，或者是 s_i^q 的逆向面；分别用下面的記号表示：

$$[s_i^q : s_j^{q-1}]=0,\ +1 \text{ 或 } -1.$$

記号$[s_i^q : s_j^{q-1}]$叫作 s_i^q 与 s_j^{q-1} 的**关联系数**. 由此可知

$$[\varepsilon s_i^q : s_j^{q-1}]=[s_i^q : \varepsilon s_j^{q-1}]=\varepsilon[s_i^q : s_j^{q-1}],\quad \varepsilon=\pm 1.$$

特别地，如果 $s=a^0a^1\cdots a^q$，而且 $t=a^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^q$，则$[s:t]=(-1)^i$.

設 n 維复形 K 的一个基本組是 $\{s_i^q\}$. 我們約定，对于一个整数 g_i，

$$g_i s_i^q=(-g_i)(-s_i^q). \tag{2}$$

然后把以整数为系数的一个綫性組合

$$x_q=g_1 s_1^q+g_2 s_2^q+\cdots+g_{\alpha_q} s_{\alpha_q}^q \tag{3}$$

叫作 K 的一个 q 維**鏈**. 如果系数都是零，則这个鏈就用 0 表示. 如果 $g_i=1$，而其他系数都是零，我們就說这个鏈就是有向单形 s_i^q.

例 鏈的几何意义. 按照 $g_i\geqslant 0$ 或 <0，我們把 $g_i s_i^q$ 看作是 g_i 个 s_i^q 或 $(-g_i)$个$(-s_i^q)$. 这些 $g_i s_i^q$ 的和形成鏈(3). 一維鏈可以看作有向的折綫. 图 5 中有向三角形的边界就是一个一維鏈 $a^0a^1+a^1a^2+a^2a^0$.

如果式(3)中的 x_q 与

$$y_q=h_1 s_1^q+h_2 s_2^q+\cdots+h_{\alpha_q} s_{\alpha_q}^q$$

是 K 的任意两个 q 維鏈,定义它們的和为

$$x_q+y_q=(g_1+h_1)s_1^q+(g_2+h_2)s_2^q+\cdots+(g_{\alpha_q}+h_{\alpha_q})s_{\alpha_q}^q.$$

它也是 K 的一个 q 維鏈. 所以,对于加法而言, K 的全体 q 維鏈形成一个自由交換群, 以 $\{s_i^q\}$ (对于固定的 q)为一个基(定义 B 3.1). 它叫作 K 的 q 維**鏈群**, 記作 $C_q(K;J)$ 或 $C_q(K)$; 这里的 J 表示整数加群. $C_q(K)$不依賴于 K 的基本組 $\{s_i^q\}$ 的选取;即如果用不同的基本組,但所得的鏈群同构.

对于任一 q 維有向单形 $s^q=a^0a^1\cdots a^q$, 我們用下列方程来定义一个 $q-1$ 維鏈 ∂s^q [讀作戴尔塔 (delta) s^q], 叫作 s^q 的**边緣鏈**或者**边緣**:

$$\partial s^0=0, \tag{4_0}$$

$$\partial s^q=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i a^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^q, \quad q>0. \tag{4_q}$$

式(4_q)是說: ∂s^q 是 s^q 的全体 $q-1$ 維順向面的和;因而 ∂s^q 不依賴于給出 s^q 的定向的排列 $a^0, a^1, \cdots, a^q$.

設給定了 n 維复形 K 的一个基本組 $\{s_i^q\}$. 从上述定义,立刻有

$$\partial s_i^0=0, \tag{5_0}$$

$$\partial s_i^q=\sum_{j=1}^{\alpha_{q-1}}[s_i^q:s_j^{q-1}]s_j^{q-1}, \quad q>0. \tag{5_q}$$

这里的式(5_q)当然还恰是 s_i^q 的全体 $q-1$ 維順向面的和. 然后定义 K 的任意 q 維鏈 x_q [式(3)] 的边緣鏈为

$$\partial x_q=\sum_{i=1}^{\alpha_q}g_i\partial s_i^q, \quad q\geqslant 0; \tag{6}$$

它当然还是 K 的一个 $q-1$ 維鏈. 我們說式(6)是根据式(3)用綫性扩張得到的,也就是說(6)表明 ∂ 是綫性运算. 我們也把 ∂ 叫作**边緣算子**. ∂ 这种运算是代数拓扑学中一个基本概念; 从它发展出来我們将要詳細討論的同調理論.

显然可見

$$\partial(x_q+y_q)=\partial x_q+\partial y_q.$$

因此，对于每一个 q，∂ 建立了鏈群 $C_q(K)$ 到鏈群 $C_{q-1}(K)$ [我們把 $C_{-1}(K)$ 看作是零群 0] 的一序列的同态 $\partial=\{\partial_q\}$

$$\partial_q: C_q(K)\to C_{q-1}(K)$$

(定义 B 1.3). ∂ 与 ∂_q 因而也叫作**边緣同态**.

例 边緣鏈的几何意义. 設 K 是图 5 中的 $\underline{s}^2$. K 上的一維边緣鏈是 $g(a^0a^1+a^1a^2+a^2a^0)$，这里的 g 是整数.

2.1 引理 对于任意一个定向单形 s^q,

$$\partial\partial s^q=0. \tag{7}$$

証 明 当 $q=0$ 或 1 时，式(7)显然成立. 設 $q\geqslant 2$，并且不妨碍普遍性，設 $s^q=a^0a^1\cdots a^q$. 然后从式(4_q)，有

$$\begin{aligned}\partial\partial s^q&=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\sum_{i=0}^{q}(-1)^i a^0\cdots\hat{a}^j\cdots\hat{a}^i\cdots a^q\\&\quad+\sum_{j=i+1}^{q}(-1)^{j-1}\sum_{i=0}^{q}(-1)^i a^0\cdots\hat{a}^i\cdots\hat{a}^j\cdots a^q\\&=\sum_{j<i}(-1)^{i+j}a^0\cdots\hat{a}^j\cdots\hat{a}^i\cdots a^q+\sum_{j>i}(-1)^{i+j-1}a^0\cdots\hat{a}^i\cdots\hat{a}^j\cdots a^q\\&=0.\ \rrbracket\end{aligned}$$

从这个簡单引理，立刻有下述两个重要的推論.

2.2 命題 設 n 維复形 K 的一个基本組是 $\{s_i^q\}$. 对于任意两个 s_i^q 与 s_k^{q-2}, $q\geqslant 2$,

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{q-1}}[s_i^q:s_j^{q-1}][s_j^{q-1}:s_k^{q-2}]=0.\ \rrbracket$$

2.3 定理 对于 n 維复形 K 的任一 q 維鏈 x_q,

$$\partial\partial x_q=0.\ \rrbracket$$

如果一个 q 維鏈 x_q 的边緣鏈 $\partial x_q=0$，則 x_q 叫作一个 q 維閉

鏈. 显然单純复形 K 上的全体 q 維閉鏈形成 q 維鏈群 $C_q(K)$ 的一个子群,叫作 K 的 q 維**閉鏈群**,記作 $Z_q(K;J)$ 或 $Z_q(K)$. 显然 $Z_q(K)=\partial_q$ 核(B§1), $Z_0(K)=C_0(K)$. 根据定理 2.3, 任一边緣鏈是一閉鏈.

如果鏈 z_q 是一边緣鏈, 即 z_q 是 K 的一个 $q+1$ 維鏈的边緣, 我們就說在 K 上 z_q **同調于零**,或 z_q 是 K 上的**零調鏈**,記作 $z_q\sim 0$ 在 K 上. K 上的全体 q 維边緣鏈显然形成 $Z_q(K)$ 的一个子群, 叫作 K 的 q 維**边緣鏈群**,記作 $B_q(K;J)$ 或 $B_q(K)$. 显然 $B_q(K)=\partial_{q+1}$ 象.如果两个閉鏈 z'_q 与 z''_q 滿足一个**同調式**: $z'_q-z''_q\sim 0$,我們就說 z'_q 与 z''_q **同調**,也記作 $z'_q\sim z''_q$. 显然 $z'_q\sim z''_q$ 与 $z''_q\sim z'_q$ 同时成立.

在 K 是 n 維的复形时, $B_n(K)=0$, 即 $B_n(K)$ 只含有 0 这个 n 維鏈.

在 K 是 n 維的复形时,商群(定义 B 1.2)

$$Z_q(K)/B_q(K)=\partial_q\text{核}/\partial_{q+1}\text{象},\quad q=0,1,\cdots,n$$

叫作 K 的 q 維**同調群**,記作

$$H_q(K;J)\quad\text{或}\quad H_q(K),$$

它不依賴于 K 的基本組 $\{s_i^q\}$ 的选取. 显然 $H_n(K)=Z_n(K)$. $H_q(K)$ 的每一个元素是 $Z_q(K)$ 中的一个模 $B_q(K)$ 的等价类; 我們很自然地要把后者叫作一个 q 維**同調类**.

从同調类与商群的定义,立即有下述命題:

2.4 命題 設 x^*, y^*, z^* 是复形 K 的同調群 $H_q(K)$ 的元素. 而 x, y, z 是 K 的 q 維閉鏈, 分別属于同調类 x^*, y^*, z^*. 則等式 $x^*+y^*=z^*$ 等价于同調式 $x+y\sim z$. 更一般地說,群之間的綫性相关性(定义 B 2.6):

$$ax^*+by^*+cz^*=0$$

(系数是不全等于零的整数)給出閉鏈間的一个等价性质:

$$ax+by+cz\sim 0;$$

后者叫作閉鏈的**同調相关性**.

边緣同态 ∂_q 的象与核显然分别是 $B_{q-1}(K)$ 与 $Z_q(K)$；因而有下述命題(定理 B 1.10)：

2.5 命題　边緣同态誘导出一个同构：

$$C_q(K)/Z_q(K) \approx B_{q-1}(K), \quad q=0, 1, \cdots, n,$$

这里的 $B_{-1}(K)$ 理解为零群. ■

鏈、閉鏈与同調閉鏈的几何意义是明显的. 以上所提到的鏈群、閉鏈群、边緣鏈群与同調群中，同調群具有特别深刻的意义. 我們在下一章中就要証明它是多面体 $|K|$ 的拓扑不变性，不依賴于 $|K|$ 的单純剖分 K. 其他的群則非如此；例如 K 是 $\underline{s}^2$ 时，从 $|K|$ 的不同的单純剖分就可以看出.

以交换群 G 为系数群的同調群　我們用式(3)定义的鏈是以整数为系数的綫性組合. 从此出发一直到得到 $C_q(K), Z_q(K)$, $B_q(K)$, $H_q(K)$ 的过程中，我們所用到的整数的性质，只是整数在加法下形成交换群 J. 如果我們把整数加群 J 换成一个任意的交换群 G，則相仿的討論将給出以 G 为系数群的鏈、鏈群 $C_q(K; G)$ 及同調群 $H_q(K; G)$ 等.

但基本的而且重要的系数群是 J. 在处理特殊問題时，有时候須用整数模 p 群 J_p，这里 p 是素数，或須用有理数加群 R. 在用 J_2 时，因为在 J_2 中 $+1=-1$，故鏈 $s_i^q=-s_i^q$. 故 $C_q(K; J_2)$ 实际是从无向单形而得到的鏈群. 我們把 $H_q(K; J)$, $H_q(K; J_p)$, 与 $H_q(K; R)$ 分别叫作**整同調群**、**模 p 同調群**与**有理同調群**.

把系数群 J 改成其他的交换群 G 的这种推广，并非只是形式的，而有其实际意义；例如上文已經提到 J_2 的几何意义. 另一方面，可以証明，$H_q(K)$ 与群 G 完全确定 $H_q(K; G)$，因而系数群 J 特别重要.

3. 复形的連通分支·零維同調群的結构

本节指出零維同調群的几何意义与結构. 本节需要附录B§2中有关直和的部分的知識.

象在II§8中定义拓扑空間的連通性和連通分支一样, 我們可以定义复形K(单形的集合). 复形K叫作**連通的**, 如果它不是两个非空的、不相交的子复形的并集; 如果复形K的一个子复形L是最大的連通子复形(即L既連通, 并且又不是K的另一連通的子复形的眞子复形), 它就叫作K的一个**連通分支**. 留給讀者証明:

1) 一个复形K連通的充要条件是: 对于K的任意两个頂点a与b, 存在它的一序列的頂点

$$a^0=a,\ a^1,\ \cdots,\ a^{q-1},\ a^q=b,$$

使得$(a^i,\ a^{i+1})$都是它的一維单形, $i=0,\ 1,\ \cdots,\ q-1$;

2) 任意一个复形可分解成R(有限)个連通分支$K_1, K_2,\cdots, K_R$, 而且是这些分支的并集. (习题.) 从2) 立刻知道: 多面体$|K|$的全体連通分支恰是$|K_1|,\ |K_2|,\ \cdots,\ |K_R|$.

設复形K可分解为R个連通分支K_i, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ R$. 根据同調群的定义与群的直和分解的定义B 2.1, 显然有

$$C_q(K;\ G)=C_q(K_1;\ G)+C_q(K_2;\ G)+\cdots+C_q(K_R;\ G).$$

我們已經有了$B_q(K;\ G)$与$B_q(K_i;\ G)$; 我們現在要証明

$$B_q(K;\ G)=B_q(K_1;\ G)+B_q(K_2;\ G)+\cdots+B_q(K_R;\ G).$$

即要証明每一元素$b_q\in B_q(K;\ G)$有唯一的表示:

$$b_q=b_q^1+b_q^2+\cdots+b_q^R,\quad b_q^i\in B_q(K_i;\ G).$$

事实上, 設$b_q=\partial x_{q+1}$, $x_{q+1}\in C_{q+1}(K;\ G)$. 因为$C_q(K;\ G)$的直

和分解，x_{q+1} 有唯一的表示：

$$x_{q+1}=x_{q+1}^1+x_{q+1}^2+\cdots+x_{q+1}^R,$$

其中 $x_{q+1}^i\in C_{q+1}(K_i;\ G)$. 因此

$$b_q=\partial x_{q+1}=\partial x_{q+1}^1+\partial x_{q+1}^2+\cdots+\partial x_{q+1}^R. \tag{1}$$

因为 K_i 是复形而且是 K 的不同的連通分支，故 ∂x_{q+1}^i 在 K_i 上，而且是一个边緣鏈 $b_q^i\in B_q(K_i;\ G)$. 又因为 K_i 是 K 的不同的連通分支，式(1)所給出的 b_q 的表示就是唯一的表示.

同样地，对于已經有了的 $Z_q(K;\ G)$ 与 $Z_q(K_i;\ G)$，要証明

$$Z_q(K;\ G)=Z_q(K_1;\ G)+Z_q(K_2;\ G)+\cdots+Z_q(K_R;\ G).$$

同样地，設 z_q 是 $Z_q(K;\ G)$ 的任一元素. 因为 $C_{q+1}(K;\ G)$ 的直和分解，有唯一的表示：

$$z_q=x_q^1+x_q^2+\cdots+x_q^R,$$

其中 $x_q^i\in C_q(K_i;\ G)$. $\partial z_q=0$ 蘊涵

$$0=\partial x_q^1+\partial x_q^2+\cdots+\partial x_q^R.$$

因为复形 K_i 是 K 的不同的連通分支，故 ∂x_q^i 在 K_i 上，而且 $\partial x_q^i=0$. 于是 $x_q^i\in Z_q(K_i;\ G)$. 这就証明了我們所要証的.

根据証明了的 $Z_q(K;\ G)$ 与 $B_q(K;\ G)$ 的直和分解，以及命題 B 2.4，我們有下述定理.

3.1 定理 如果复形 K 分解为 R 个連通分支 K_i, $i=1, 2, \cdots, R$，則 K 的以交換群 G 为系数群的同調群是 K_i 的以 G 为系数群的同調群的直和：

$$H_q(K;\ G)=H_q(K_1;\ G)+H_q(K_2;\ G)+\cdots+H_q(K_R;\ G). \ \blacksquare$$

在定义复形 K 的有向单形的基本組 $\{s_i^q\}$ 时，我們特别規定了取零維有向单形

$$s_i^0=+a^i,\quad i=1, 2, \cdots, \alpha_0,$$

这里 a^i 是 K 的頂点. 这个規定使我們能够引进零維鏈 $x_0\in$

$C_0(K;G)$的指数这一个重要概念.

設

$$x_0=g_1a^1+g_2a^2+\cdots+g_{\alpha_0}a^{\alpha_0},\quad g_i\in G.$$

我們命

$$\mathrm{In}(x_0)=g_1+g_2+\cdots+g_{\alpha_0},$$

把它叫作 x_0 的**指数**. 显然有

$$\mathrm{In}(x_0+y_0)=\mathrm{In}(x_0)+\mathrm{In}(y_0);$$

这就是說,指数运算是一个同态

$$\mathrm{In}: C_0(K;G)\to G.$$

它显然是一个满同态.

3.2 命題 零維鏈 $x_0\sim 0$ 蘊涵 $\mathrm{In}(x_0)=0$,即 $B_0(K;G)\subset\mathrm{In}$ 核.

証 明 設 $x_0=\partial x_1$, $x_1=g_1s_1^1+g_2s_2^1+\cdots+g_{\alpha_1}s_{\alpha_1}^1$, $x_1\in C_1(K;G)$. 因为 In 是綫性的, 故先考虑 $\mathrm{In}\partial(g_is_i^1)=g_i\mathrm{In}(\partial s_i^1)$. 因为 $\mathrm{In}(\partial s_i^1)=0$, 本命題成立. ▌

3.3 命題 設复形 K 是連通的. 零維鏈 $x_0\sim 0$ 的一个充要条件是 $\mathrm{In}(x_0)=0$. 因而 $H_0(K;G)\approx G$.

証 明 必要性已在命題 3.2 中証明了. 現在証充分性, 設 $x_0=g_1a^1+g_2a^2+\cdots+g_{\alpha_0}a^{\alpha_0}$, 且 $\mathrm{In}(x_0)=0$. 因为 K 連通,对于每一个頂点 a^i, $i>1$, K 上存在一个一維鏈 y_1^i (即有向折綫), 使得 $\partial y_1^i=a^1-a^i$, 即 $a^i\sim a^1$. 現在

$$x_0\sim x_0+\partial(g_1y_1^1+g_2y_1^2+\cdots+g_{\alpha_0}y_1^{\alpha_0})=\mathrm{In}(x_0)a^1=0.$$

这就証明了充分性.

再看同态

$$\mathrm{In}: C_0(K;G)=Z_0(K;G)\to G.$$

因为 In 是满同态, In 象 $=G$; 因为上文才証明的結果, In 核 $=B_0(K;G)$. 根据命題 B 1.10, 得 $H_0(K;G)\approx G$. ▌

这使我們能把定理 3.1 中关于零維同調群的結論更加明确化，而得到下述定理：

3.4 定理　如果复形 K 可分解为 R_0 个連通分支，則零維同調群 $H_0(K; G)$ 是 R_0 个群 G 的直和. ▌

习　　題

試証本节开始时关于复形的連通性与連通分支的两个命題.

4. 几个簡单的复形的同調群·假流形

在本节中我們給出复形的几个簡单例子. 从它們的几何性质出发，先計算同調类，然后得到同調群. 在下面的例子中，讀者应先彻底理解 $G=J$ 这重要的情形，其次 $G=J_p$，最后任意的 G.

前四个例子中的复形是二維的，后三个中的是 n 維的.

假流形是一种特殊的复形. 前六个例子中的复形都是假流形的特例.

例 4.1　**平环**的一个单純剖分 K 見图 6. 复形 K 也可以看作由图 7 給出的，或者由迭合图 8 中长方形域的两条边 a^1a^4 而得到的. K 具有 $(\alpha_0=)6$ 个

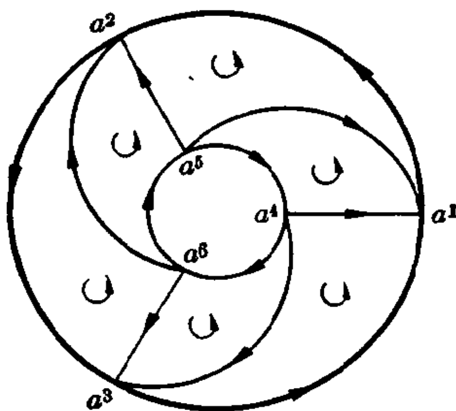


图 6

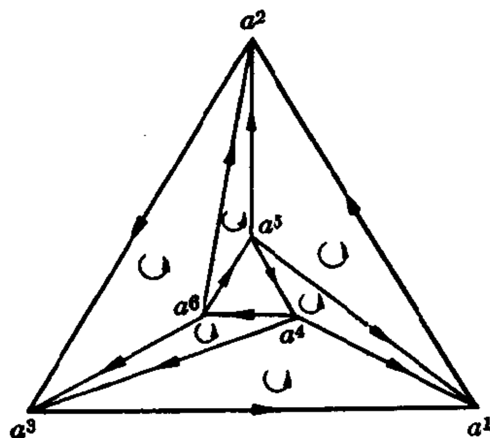


图 7

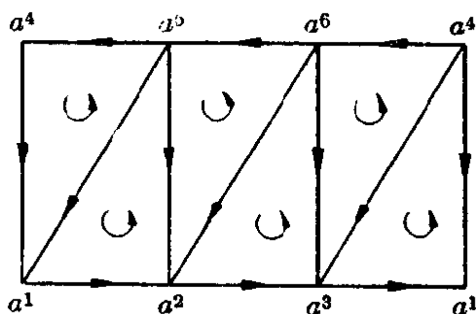


图 8

頂点，$(\alpha_1=)12$ 条棱与 $(\alpha_2=)6$ 个三角形. 图中的箭头給出了有向单形的一个基本組 $\{s_i^q\}$. 图 6 中 K 的单形有下述性质：

1）在內圓周或外圓周上的每一条有向棱恰是一个有向三角形的顺向面；

2）其他的每一条有向棱(叫作"中間棱")恰是两个三角形的公共面；而且是一个有向三角形的順向面，一个有向三角形的逆向面；

3）每两个三角形 s_1^2 与 s^2 可用一串的互相間隔的三角形与棱連接起来：

$$s_1^2,\ s_1^1,\ s_2^2,\ s_2^1,\ \cdots,\ s_k^2,\ s_k^1,\ s^2,$$

其中 s_i^1 是 s_i^2 与 s_{i+1}^2 的公共棱，$1\leqslant i<k$，而且 s_k^1 是 s_k^2 与 s^2 的公共棱.

設系数群是 G.

先計算 $H_2(K;G)$. 設 z_2 是 K 的一个二維閉鏈：$\partial z_2=0$. 把 ∂z_2 看作是 s_i^1 的以 G 的元素为系数的綫性組合. $\partial z_2=0$ 就是說：每一个 s_i^1 在 ∂z_2 中出現的系数是零；为簡单起見，我們說每一个 s_i^1 在 ∂z_2 中出現零次或不出現. 現在設一个有向三角形 s_i^2，例如 $a^5a^4a^1$，在 z_2 中出現的次数是 $g(\in G)$. 因为

$$\partial(a^5a^4a^1)=a^4a^1+\cdots,\quad \partial(a^3a^1a^4)=a^1a^4+\cdots,$$

又因为性质 2)，有向三角形 $a^3a^1a^4$ 也必須在 z_2 中出現 g 次，才能使得 a^1a^4 在 ∂z_2 中不出現. 因为性质 3)，每一个 s_i^2 必須在 z_2 中出現 g 次. 因此，如果把整数鏈 $\sum\limits_{i=1}^{6}s_i^2$ 記作 c_2^0：

$$c_2^0=\sum_{i=1}^{6}s_i^2,$$

則

$$z_2=gc_2^0.$$

現在再命內圓周上的 s_i^1 的和为 z_1'，外圓周上的 s_i^1 的和为 z_1''. 因为性质 1)，$\partial z_2=gz_1'+gz_1''$. 因而 $\partial z_2=0$ 蘊涵 $g=0$，$z_2=0$. 这就証明了 K 上的唯一的二維閉鏈是 $z_2=0$，即 $H_2(K;G)=0$.

再計算 $H_1(K;G)$. 上面的討論已經給出整数鏈 c_2^0 的边緣

$$\partial c_2^0 = z_1' + z_1''.$$

容易看出 z_1' 与 z_1'' 都是整数閉鏈；故

$$z_1'' \sim -z_1',$$

即 z_1'' 与 $-z_1'$ 属于同一个整同調类.

現在首先証明：(i) 任一个以 G 为系数群的一維閉鏈 z_1 都与一个 gz_1' 属于同一个同調类，这里的 g 由 z_1 唯一地决定. 設外圓周上一条棱在 z_1 中出現，例如 $z_1 = g'a^1a^2 + \cdots$. 因为性质 1)，这条棱是唯一的一个有向三角形 s_i^2 的順向面. 例如棱 a^1a^2 是 $a^5a^1a^2$ 的順向面时，作閉鏈 $z_1 - g'\partial(a^5a^1a^2) \sim z_1$. 对于在 z_1 中出現的外圓周上的每一条棱我們都如此处理，就得到一个一維閉鏈 $z_1^1 \sim z_1$，在 z_1^1 中外圓周上的任一条棱都不出現. 如果在 z_1^1 中出現"对角"棱 a^6a^2，我們也可以同样地用 $+a^6a^5 + a^5a^2$ 替代它. 这样地消去 z_1^1 中全体对角棱之后，結果是一个一維鏈 z_1^2；它不含有外圓周上的棱，不含有对角棱，而且是与 z_1 同調的閉鏈. 現在要証 z_1^2 只含有內圓周上的棱，不含有"輻射"棱，例如 a^5a^2. 事实上，因为 z_1^2 是閉鏈，頂点 a^2 不能在 ∂z_1^2 中出現；又因为除 a^5a^2 之外，z_1^2 不含有别个以 a^2 为頂点的棱；所以棱 a^5a^2 不在 z_1^2 中出現. 这就是說 z_1^2 完全在內圓周上. 因为 z_1^2 是閉鏈，內圓周上的每一条棱在 z_1^2 中出現的次数必相同；即

$$z_1^2 = gz_1', \quad g \in G.$$

再証明：(ii) 如果 $g_1 \neq g_2$，則 g_1z_1' 与 g_2z_1' 不同調；换句話說，如果 $(g_1-g_2)z_1' = gz_1' \sim 0$，則 $g_1 - g_2 = g = 0$. 設 $gz_1' = \partial c_2$，c_2 是一个二維鏈. 因为性质 1)，以內圓周上的一条棱为面的 s_i^2 必在 c_2 中出現 g 次；因为 ∂c_2 中不含有中間棱. 其他的 s_i^2 也必在 c_2 中出現 g 次. 所以 c_2 必是 gc_2^0，因而 $\partial c_2 = gz_1' + gz_1''$. 但我們的假設是 $gz_1' = \partial c_2$，所以 $g = 0$.

以上証明了的 (i) 是說，gz_1' 的同調类，$g \in G$，給出 K 的全体一維同調类. (ii)是說，gz_1' 的同調类$=g'z_1'$ 的同調类，当而且只当 $g = g'$；特別地，gz_1' 的同調类是 $B_1(K;G)$，当而且只当 $g = 0$. 所以 $H_1(K;G) \approx G$.

最后，$H_0(K;G) \approx G$，从定理 3.4.

等到将来証明了 $H_1(K;G)$是拓扑不变性时，这里証明了的 $H_1(K;J) \approx J$ 就是說：平环中的任一有向閉曲綫(不仅是上文中的閉鏈 z_1)必与取 g 次的有向的內圓周共同作成平环上的一个有向区域的边界. 平环的这个几何性质在数学分析与复变函数論中是常用到的.

附　記　在証明 $H_1(K;G)\approx G$ 的时候，我們重复地用了一个方法：把棱 a^1a^2 用鏈 $a^1a^5+a^5a^2$ 替换，把棱 a^6a^2 用鏈 $a^6a^5+a^5a^2$ 替换等．这方法以后常用；为方便起見，我們把它叫作**挤到边上去的方法**．

例 4.2　**Möbius 帯**是由迭合图 9 中长方形域的两条边 AB 而得到的．它的一个单純剖分 K 見图 10（注意与图 8 的区别！）．复形 K 共有 $(\alpha_0=)6$ 个頂点，$(\alpha_1=)12$ 条棱与 $(\alpha_2=)6$ 个三角形，图中箭头給出了 K 的有向单形的一个基本組 $\{s_i^q\}$．

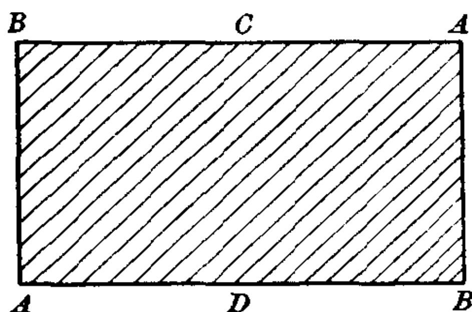


图　9

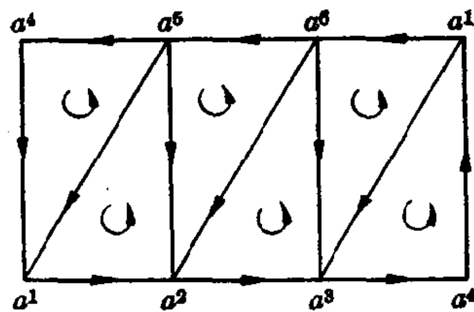


图　10

用 c_2^0 表示全体 s_i^2 的和，c_1' 表示底边上的全体 s_i^1 的和，c_1'' 表示頂边上的全体 s_i^1 的和；命 $z_1'=c_1'+a^4a^1$，$z_1''=c_1''+a^4a^1$．然后有整数鏈

$$\partial c_2^0=c_1'+c_1''+2a^4a^1=z_1'+z_1''.$$

容易知道：c_2^0 不是整数閉鏈，也不是整数模 $p(\geqslant 2)$ 閉鏈；而且 z_1'，z_1''，$c_1'+c_1''$ 都是整数閉鏈．

象在例 4.1 中一样，容易証明 $H_2(K;G)=0$，$H_0(K;G)\approx G$．

还待計算的是 $H_1(K;G)$．从 ∂c_2^0，我們已經知道整数鏈

$$z_1''\sim -z_1'.$$

設 z_1 是任一以 G 为系数群的一維閉鏈，$\partial z_1=0$．象在例 4.1 中一样用挤到边上去的方法．如果頂边上的一条棱 s_i^1 在 z_1 中出現，则可以把它替换成一条对角棱与一条竪棱；例如可以用 $a^5a^1+a^1a^4$ 替换 a^5a^4．这样地就可以从 z_1 得到一个鏈 z_1^1，它不含有頂边上的棱，而且是与 z_1 同調的閉鏈．然后再把 z_1^1 中可能出現的对角棱替换成竪棱与底边上的棱，得到一个与 z_1 同調的閉鏈 z_1^2．它只含有竪棱与底边上的棱．因为 $\partial z_1^2=0$，用例 4.1 中同样的論証，z_1^2 不可能含有竪棱 a^5a^2 或 a^6a^3；如果 z_1^2 含有一条底棱 g 次，它就必含有 gz_1'；而且 $z_1^2-gz_1'$ 不可能含有竪棱 a^4a^1，因而 $z_1^2=gz_1'$．这就証明了 $z_1\sim gz_1'$，$g\in G$．最后，象在例 4.1 中一样，$gz_1'\sim 0$ 蕴涵 $g=0$．因而 $H_1(K;G)\approx G$．

例 4.3 **环面**是由迭合图 11 中长方形域的左右两边 AB 与 $A'B'$，与迭合底顶两边 AA' 与 BB' 而得到的．它的一个单純剖分 K 見图 12．复形 K 共有 $(\alpha_0=)9$ 个頂点，$(\alpha_1=)27$ 条棱，与 $(\alpha_2=)18$ 个三角形．把在长方形的边上的棱叫作边緣棱，其他的叫作中間棱．把中間棱又分成横棱、竪棱与对角棱三种．图 12 中的箭头給出了 $\{s_i^q\}$．

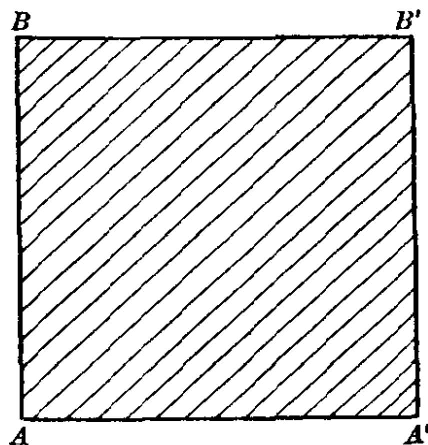
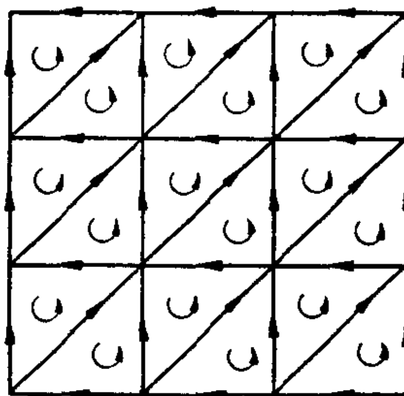


图 11


图 12

用 z_2^0 表示全体二維有向单形 s_i^2 的和，象在例 4.1 中一样，我們能証 z_2^0 是二維整数閉鏈，而且 $H_2(K;G)\approx G$．当然，$H_0(K;G)\approx G$．

用 z_1' 表示左边上的（也就是右边上的）三条有向棱 s_i^1 的和，z_1'' 表示底边上的（也就是頂边上的）三条有向棱的和．它們都是一維整数閉鏈．我們要証的 $H_1(K;G)\approx$ 直和 $G+G$ 是下面两个事实的推論．

(i) 任一以 G 为系数群的一維閉鏈 $z_1\sim g'z_1'+g''z_1''$，$g', g''\in G$．首先我們証明 z_1 有一个同調的、只含有边緣棱的一維鏈．如果 z_1 含有一条中間的竪棱或对角棱，用例 4.1 中挤到边上去的方法；加上这棱的左邻三角形的边緣鏈之后，这棱就用这三角形的其他两棱替换了；如果 z_1 含有一条中間的横棱，則这条横棱的直綫上三条横棱必在 z_1 中出現同样的次数 g．因为这三条横棱之和的 g 倍 $\sim gz_1''$，故又可以用 gz_1'' 替换．經过有限次替换之后，我們得到一个与 z_1 同調的鏈 z_1^1，它只含有边緣棱．其次，因为 z_1^1 是閉鏈，z_1^1 必須是 $g'z_1'+g''z_1''$．

(ii) $g'z_1'+g''z_1''\sim 0\Rightarrow g'=g''=0$．这里的假設蘊涵存在一个二維鏈 c_2 使得 $\partial c_2=g'z_1'+g''z_1''$．因为 ∂c_2 中中間棱不出現，所以 $c_2=gz_2^0$．但 $\partial c_2=g\partial c_2^0=0$，故 $g'z_1'+g''z_1''=0$．因为 z_1' 中有棱不在 z_1'' 中，并且 z_1'' 中有棱不在 z_1' 中，故 $g'=g''=0$．

例 4.4 **射影平面**是由迭合圓域的对徑边界点而得到的，它的一个单純

剖分 K 見图 13．复形 K 共有 $(\alpha_0=)6$ 个頂点，$(\alpha_1=)15$ 条棱，与 $(\alpha_2=)10$ 个三角形．把边界圓周上的棱叫作边緣棱，其他的棱叫作中間棱．图中箭头給出了 $\{s_i^2\}$．

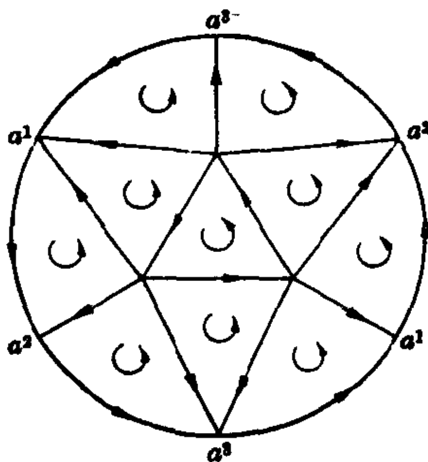


图 13

用 c_2^0 表示全体 s_i^2 的和，用 z_1^0 表示 $a^1a^2+a^2a^3+a^3a^1$．容易看出：这两条整数鏈的边緣鏈是

$$\partial c_2^0=2z_1^0,\quad \partial z_1^0=0.$$

現在算 $H_2(K;G)$．設 z_2 是任一以 G 为系数群的二維閉鏈．因为 ∂z_2 不含有中間棱，故 z_2 必是 gc_2^0；又因为 $\partial z_2=\partial gc_2^0=2gz_1^0$，故 $2g=0$，即 $g\in {}_2G$ [見附录 B § 1.1 例 1.1 ii)]，于是 $H_2(K;G)\approx {}_2G$．特别有 $H_2(K;J)=0$；$H_2(K;J_2)\approx J_2$；与 $H_2(K;J_p)=0$．这里 p 是大于 2 的素数．

再算 $H_1(K;G)$．首先，設 z_1 是任一以 G 为系数群的一維閉鏈．象在例 4.1 中一样用挤到边上去的方法，可以把 z_1 中出現的中間棱挤到边緣棱上去，因而得 $z_1\sim gz_1^0$．其次，如果 $gz_1^0\sim 0$，則存在 $g'\in G$ 使得 $g=2g'$，即 $g\in 2G$．事实上，$gz_1^0\sim 0$ 蘊涵存在 c_2 使得 $gz_1^0=\partial c_2$．因为 ∂c_2 不含有中間棱，c_2 必 $=g'c_2^0$，$g'\in G$；又因为 $gz_1^0=\partial g'c_2^0=2g'z_1^0$，故 $g=2g'$．最后，映射 $g\to$(gz_1^0 的同調类)是 G 到 $H_1(K;G)$ 的一个滿同态，它的核是 $2G$；于是 $H_1(K;G)\approx G/2G=G_2$．特别有 $H_1(K;J)\approx J_2$；$H_1(K;J_2)\approx J_2$；$H_1(K;J_p)=0$，对于大于 2 的素数 p．

$H_0(K;G)$ 当然 $\approx G$．

例 4.5 $n(>0)$ 維单形 $\underline{s}^n$ 的閉包复形 $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^n$ 是一个 n 維复形．为簡单起見，把它記作 $\underline{s}^n$．設单形 $\underline{s}^n$ 的頂点是 $a^0, a^1, \cdots, a^n$．把 $\underline{s}^n$ 的与 a^0 相对的

$n-1$ 維面記作 $\underline{s}^{n-1}$.

設 z_q 是复形 $\underline{s}^n$ 的任一以 G 为系数群的 q 維閉鏈，$0<q<n$. 首先，我們能求得一个与 z_q 同調的閉鏈 z'_q，它不含有复形 $\underline{s}^{n-1}$ 的任一 q 維有向单形. 例如，如果这样的一个有向单形 s^q_1 在 z_q 中出現 g 次，$g\in G$，則从 z_q 减去 $g\partial s^{q+1}_2$，$s^{q+1}_2=a^0s^q_1$，就得到一个与 z_q 同調的閉鏈，它不含有 s^q_1. 这仍然是例 4.1 中挤到边上去的方法. 我們如此依次把 z_q 中的 $\underline{s}^{n-1}$ 上的 q 維有向单形消去，就得到所求的 z'_q，其中出現的每一个 q 維有向单形都以 a^0 为一个頂点. 其次，我們說 $z'_q=0$. 事实上，如果一个 q 維有向单形 $s^q_3=a^0s^{q-1}_4$ 在 z'_q 中出現 g 次，則复形 $\underline{s}^{n-1}$ 上的 s^{q-1}_4 也在 $\partial z'_q$ 中出現 g 次；因为在 z'_q 中出現的、以 a^0 为一个頂点与以 s^{q-1}_4 为一个 $q-1$ 維面的 q 維有向单形只是这个 s^q_3. 又因为 $\partial z'_q=0$，所以 $g=0$，即 s^q_3 不在 z'_q 中出現. 这就証明了复形 $\underline{s}^n$ 上每一个 q 維閉鏈都是零調鏈 $0<q<n$；即 $H_q(\underline{s}^n;G)=0$，$0<q<n$.

显然还有 $H_0(\underline{s}^n;G)\approx G$，$H_n(\underline{s}^n;G)=0$.

0 維单形显然只有 $H_0(\underline{s}^0;G)\approx G$.

例 4.6　$n(>0)$ 維球 S^n 是同胚于 $n+1$ 維单形 $\underline{s}^{n+1}$ 的边緣复形的多面体 $|\dot{\underline{s}}^{n+1}|$ 的空間. 取 $\dot{\underline{s}}^{n+1}$ 作为 S^n 的单純剖分.

根据例 4.5，复形 $\dot{\underline{s}}^{n+1}$ 上的一个以 G 为系数群的 q 維閉鏈 z_q 在复形 $\underline{s}^{n+1}$ 上零調，即是复形 $\underline{s}^{n+1}$ 上的一个 $q+1$ 維鏈 c_{q+1} 的边緣：

$$z_q=\partial c_{q+1},\quad c_{q+1}\text{ 在 }\underline{s}^{n+1}\text{ 上},\ 0<q<n+1.$$

从这个基本事实出发，我們来考慮下列两个情形.

如果 $0<q<n$，則 c_{q+1} 也在 $\dot{\underline{s}}^{n+1}$ 上，即

$$z_q\sim 0,\quad \text{在 }\dot{\underline{s}}^{n+1}\text{ 上},\ 0<q<n.$$

这就是說，$H_q(\dot{\underline{s}}^{n+1};G)=0$，$0<q<n$.

設 $q=n$. 首先因为 s^{n+1} 这有向单形是复形 $\underline{s}^{n+1}$ 上的唯一的一个 $n+1$ 維的有向单形，則复形 $\underline{s}^{n+1}$ 上的任一 $n+1$ 維鏈必是

$$c_{n+1}=gs^{n+1},\quad g\in G.$$

所以从上述基本事实，

$$z_n=\partial c_{n+1}=g\partial s^{n+1},\quad g\in G;$$

即复形 $\dot{\underline{s}}^{n+1}$ 上的任一以 G 为系数群的 n 維閉鏈 z_n 必是 $g\partial s^{n+1}$，$g\in G$. 其次，因为复形 $\dot{\underline{s}}^{n+1}$ 只是 n 維的复形，$g\partial s^{n+1}$ 在 $\dot{\underline{s}}^{n+1}$ 上零調蘊涵 $g\partial s^{n+1}=0$ 或 $g=0$. 这就証明了 $H_n(\dot{\underline{s}}^{n+1};G)\approx G$.

例 4.7 錐形 設 K 是一个 n 維的复形,而且它的頂点表 V (定义 1.14) 的頂点与 q 維单形分别是

$$e^i, \quad i=1,2,\cdots,\alpha_0,$$
$$t_i^q, \quad i=1,2,\cdots,\alpha_q;$$

这里 $q=0,1,\cdots,n$, 而且 $t_i^0=e^i$. 現在我們从 V 来作一个新頂点表 $\hat{V}$:$\hat{V}$ 的頂点比 V 的恰多一个新頂点 e; $\hat{V}$ 有 $q+1$ 維单形

$$et_i^q=\{e, e^{i_0}, e^{i_1}, \cdots, e^{i_q}\},$$

当而且仅当 V 有 q 維单形 $t_i^q=\{e^{i_0}, e^{i_1}, \cdots, e^{i_q}\}$. 容易驗証 $\hat{V}$ 确是一个頂点表.(复习題.)如果把 V 簡写为 $V=\{t_i^q\}$, 則 $\hat{V}$ 也同样地可写为

$$\hat{V}=e\cup\{t_i^q\}\cup\{et_i^q\}.$$

而且明显地, $\hat{V}\supset V$. 我們把 $\hat{V}$ 叫作以 e 为頂、以 V 为底的**錐形**.

同样地, 如果 $n+1$ 維的复形 $\hat{K}$ 有一个 n 維的子复形 K, 它們同时分别是 $\hat{V}$ 与 V 的几何实現,而且 $\hat{K}$ 的頂点 a 在这几何实現中与 $\hat{V}$ 的頂点 e 对应, $\hat{K}$ 就叫作以 a 为頂以 K 为底的錐形 (参看推論 II 9.8 后). 留給讀者証明, 对于任意的 n 維复形 K,

$$H_0(\hat{K};G)\approx G, \quad H_q(\hat{K};G)=0, \quad 0<q\leqslant n+1.$$

(习題 6).

假 流 形

在說明了这些例子之后, 我們要討論一类重要的特殊复形——假流形. 它一方面概括了前六个例子中的复形的一些共同性质,另一方面也为将来討論更重要的"流形"作准备.

4.1 定义 具有下述性质的一个 $n(\geqslant 1)$ 維的复形叫作一个 n 維的**閉假流形**:

1) 它的每一个单形是它的至少一个 n 維单形的面;

2) 它的每一个 $n-1$ 維单形恰是它的两个 n 維单形的面;

3) 对于它的任两个 n 維单形 $\underset{\sim}{s}_1^n$ 与 $\underset{\sim}{s}^n$, 存在着它的一串互相間隔的 n 維单形与 $n-1$ 維单形:

$$\underset{\sim}{s}_1^n, \underset{\sim}{s}_1^{n-1}, \underset{\sim}{s}_2^n, \underset{\sim}{s}_2^{n-1}, \cdots, \underset{\sim}{s}_k^n, \underset{\sim}{s}_k^{n-1}, \underset{\sim}{s}^n,$$

其中 s_i^{n-1} 是 s_i^n 与 s_{i+1}^n 的公共面，$1 \leq i < k$，而且 s_k^{n-1} 是 s_k^n 与 s^n 的面.

这三个性质分别叫作閉假流形的**純粹性**、**无分支性**与**强連通性**. 3)中的一串 n 維与 $n-1$ 維单形是通常的折綫的推广，叫作連接 s_1^n 与 s^n 的一条 ***n* 維折綫**.

設 M 是一个 n 維的閉假流形. 任意地給定 M 的全体 n 維单形的定向，就得到一組有向单形 s_i^n, $i=1, 2, \cdots, \alpha_n$. 如果 M 有一組 n 維的有向单形 $\{s_i^n\}$，使得它的每一个任意定向的 $n-1$ 維单形都是这組中一个 n 維单形的順向面、另一个的逆向面，我們就說 M 是**能定向的**. 这时候我們还說这一組 $\{s_i^n\}$ 是 M 的一个定向，这一組中每两个单形的定向是**协合的**. 如果 M 无这样的一組，我們就說 M **不能定向**.

一維的閉假流形是一条簡单的閉折綫. 例 4.3 中的环面与例 4.6 中的 n 維球的单純剖分是能定向的閉假流形，例 4.4 中的射影平面的单純剖分是不能定向的閉假流形.

如果一組 $\{s_i^n\}$ 是能定向的 M 的一个定向，則容易看出 $\{-s_i^n\}$ 也是 M 的一个定向，而且 M 无其他的定向. 这两个定向叫作 M 的**相反的定向**. 指定了能定向的 M 的一个定向时，我們就說 M **有向**. 能定向的 M 的一个定向 $\{s_i^n\}$ 給出一个閉鏈 $\sum s_i^n$，叫作 M 的一个**基本閉鏈**，也叫作 M 的一个**定向鏈**.

用例子中用过几次的方法，容易証明下述定理：

4.2 定理 設 M 是 n 維的閉假流形. 如果 M 能定向，則 $H_n(M; G) \approx G$，因而也有 $H_n(M; J_2) \approx J_2$. 如果 M 不能定向，則 $H_n(M; G) \approx {}_2G$，特别有 $H_n(M; J) = 0$, $H_n(M; J_2) \approx J_2$.]

我們将来要証明，复形的維数与同調群都是拓扑不变量. 然后从下一个定理可以推出，复形是否 n 維的閉假流形是拓扑不变性.

4.3 定理 n 維的閉假流形 M 的三个性质等价于下面一組性质：閉假

流形的前两个性质与 $H_n(M;J_2)\approx J_2$.

証 明 本定理的一半已經在上面的定理中証明过了. 現在还要証明的是: 如果一个复形 K 具有閉假流形的前两个性质, 而且 $H_n(M;J_2)\approx J_2$, 則 K 也具有閉假流形的第三个性质, 强連通性, 即 K 是閉假流形. 事实上, 設取定了 K 的一个 n 維单形 s_1^n. 設 s^n 是 K 的一个 n 維单形; 而且对于 s_1^n 与 s^n 存在 K 上的一条 n 維折綫. 全体这样的 s^n 与它們的面形成 K 的一个子复形, 記作 K_1; 而且全体这样的 s^n 之和是 K 上的一个 n 維的模 2 鏈 c_2. 从 K_1 的定义可知, 如果 s^n 属于 K_1, 而且 s^n 的一个 $n-1$ 維面是 K 的另一个 n 維单形的面, 則这另一个 n 維单形也属于 K_1. 所以根据 K 的性质 2), K_1 也有性质 2). 因而 c_2 是模 2 閉鏈. 如果 K_1 不是 K, 則同样地可得到 K 上的另一个 n 維模 2 閉鏈, 因而不能有 $H_n(K;J_2)\approx J_2$. 这与假設矛盾, 所以 K_1 就是 K, 即 K 有强連通性. ▌

4.4 定义 带边緣的假流形 如果一个 n 維的复形具有閉假流形的性质 1) 与 3), 而且具有下述的性质, 則它叫作一个 n 維的**带边緣的假流形**:

2′) 它的每一个 $n-1$ 維单形至多是它的两个 n 維单形的面, 而且至少它的一个 $n-1$ 維单形只是它的一个 n 維单形的面.

設 M 是一个 n 維的带边緣的假流形. 非两个 n 維单形的公共面的 $n-1$ 維单形全体, 以及它們的面形成 M 的一个子复形, 叫作 M 的**边緣**. 不在边緣上的单形叫作 M 的**中間单形**. 任意地給定 M 的全体 n 維单形的定向, 就得到 M 的一組有向单形 $\{s_i^n\}$, $i=1, 2, \cdots, \alpha_q$. 如果 M 有一組 n 維的有向单形 $\{s_i^n\}$, 使得它的每一个任意定向的 $n-1$ 維中間单形都是这組中一个 n 維单形的順向面、另一个的逆向面, 我們就說 M 是**能定向的**; 否則說 M 是**不能定向的**.

例 4.1 中的平环与例 4.2 中的 Möbius 带的单純剖分分別是能定向的与不能定向的带边緣的假流形.

习 題

1. 設空間中有 $m(\geqslant 2)$ 条簡单閉曲綫, 它們都通过同一个点 A, 而且每两条都无其他的交点. 試把这图形剖分成一維复形 K, 幷求 K 的同調群.

2. 設空間中有 $m(\geqslant 2)$ 条簡单閉曲綫 $C_1, C_2, \cdots, C_m$, 其中 C_i 只与 $C_{i+1}(1\leqslant i\leqslant m-1)$ 恰有一交点 A_i, 而且 C_i 与 $C_j(j\neq i-1, i+1)$ 都无交点.

試把这图形剖分成一維复形 K，幷求 K 的同調群.

3. 試証：Möbius 带与平环虽然有相同的同調群，但它們不同胚.

4. 設平面上的圓域的圓心是 O，而且 m 是任一正整数 $\geqslant 2$. 繞 O 的、經过弧度 $2\pi/m$ 的旋轉把这圓域与圓周分別变成它們自己. 把圓周的每一点与它在这旋轉下的象点看作是同一点. 試把这图形剖分成二維单純复形 K，幷求 K 的同調群.

5. 把长方形域(图 14)的左右两边 AB 与 $A'B'$ 迭合起来，同时把上下两边 AA' 与 $B'B$ 迭合起来；如此得到的图形叫作 Klein 瓶. 試把这图形剖分成二維的单純复形 K，幷求 K 的同調群.

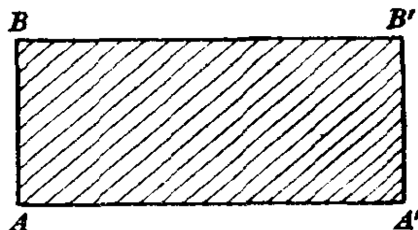


图 14

6. 求錐形 $\hat{K}$ 的同調群.

[提示：用例 4.5 中的方法.]

7. 設 M 是 n 維球 S^n 的"八面形"剖分. 1) 試求得 M 的一个定向 $\{s_i^n\}$，因而証明了 M 能定向. 2)設 $\{s_i^n\}$ 是 M 的一个定向. 試說明：按照 n 是奇数或偶数，s_i^n 与它的对徑象具有协合的或不协合的定向.

5. 整同調群的結构·Euler-Poincaré 公式

本节的第一部分中整同調群的結构的定理 5.1 是定理 B 4.4 的直接推論，它的証明需要附录 B § 3 与 B § 4 的知識；后一部分中 Euler-Poincaré 公式的定理 5.3 是定理 B 2.9 的直接推論，它的証明需要 B § 2 中关于秩的知識*). 整同調群的結构給出复形

*) 这两部分的証明方法是重要的. 但因为第一部分的証明牽涉到群論的定理較多，而且未給出有效的計算方法(参看定理 B 4.4 后的附記)，第一次讀本书时，可只理解定理 B 4.4 的叙述，即进而讀本节第一部分. 第一次讀本书时也可略去第二部分，因为 § 6 中的定理 6.1 立即給出 Euler-Poincaré 公式[参看定理 6.1 后的附記].

的重要的拓扑不变数——Betti 数与撓系数.

本节还附带討論模 p 同調群.

設 K 是 n 維复形,而且 $\{s_i^q\}$, $q=0, 1,\cdots, n$; $i=1, 2,\cdots, \alpha_q$, 是 K 的有向单形的一个基本組. 对于任一 q, s_1^q, s_2^q, $\cdots$, $s_{\alpha_q}^q$ 是 K 的 q 維鏈群 $C_q(K)$ 的一个基. 根据推論 B 4.2 与 B 4.3, $C_q(K)$ 的子群 $Z_q(K)$, $B_q(K)$ 以及同調群 $H_q(K)$ 都是有限生成的. 因而根据定理 B 4.4 有下面的定理:

5.1 定理 n 維的有限复形 K 的 q 維整同調群能唯一地分解为下述直和:

$$H_q(K)=\underbrace{J+J+\cdots+J}_{R_q}+J_{\theta_q^1}+J_{\theta_q^2}+\cdots+J_{\theta_q^{\tau_q}},\quad q=0, 1, \cdots, n,$$

这里的 R_q, $\tau_q\geqslant 0$, 而且在 $\tau_q>0$ 时, θ_q^i 整除 θ_q^{i+1}. ▌

如果用閉鏈与同調的說法, 定理 5.1 是說: 可以取同調类 $\overset{*}{x}{}^i (i=1, 2, \cdots, R_q)$ 与 $\overset{*}{y}{}^j (j=1, 2, \cdots, \tau_q)$ 分别作为 $H_q(K)$ 的直和分解的前 R_q 个自由循环群与后 τ_q 个有限循环群的母元. 根据直和分解的定义以及有限循环群的性质, $H_q(K)$ 的任一元素 (同調类)

$$\overset{*}{z}=\sum a_i\overset{*}{x}{}^i+\sum b_j\overset{*}{y}{}^j,\ a_i \text{ 整数},\ b_j \text{ 整数模 } \theta_q^j.$$

这也就是說, 如果閉鏈 x^i, y^j 是同調类 $\overset{*}{x}{}^i$, $\overset{*}{y}{}^j$ 的代表, 則任一同調类 $\overset{*}{z}$ 的代表閉鏈

$$z\sim\sum a_i x^i+\sum b_j y^j.$$

$H_q(K)$ 的撓子群(定义見例 B 1.1 中的 iv))叫作 K 的**撓子群**; $\{\overset{*}{x}{}^i, \overset{*}{y}{}^j\}$, $\{\overset{*}{x}{}^i\}$, $\{\overset{*}{y}{}^j\}$ 分别叫作 K 的 q 維**同調基**、**Betti 基**、**撓基**; R_q, $\{\theta_q^i\}$ 分别叫作 K 的 q 維 **Betti 数**、**撓系数**. $H_q(K)$ 的不变量完全組 $\{R_q, \theta_q^i\}$ 的几何意义应特别注意.

根据定理 3.4, 立刻得到下面的推論中关于零維的 Betti 数与

零維的撓系数的結論.

5.2 推論 n 維的有限复形 K 的零維 Betti 数 R_0 等于 K 的連通分支的个数. K 无零維的与 n 維的撓系数.

証 明 剩下要証明的是 K 无 n 維的撓系数. 設 $z_n \neq 0$ 是一个 n 維閉鏈, 而且 $\lambda z_n \sim 0$, λ 整数. 因为 $H_n(K) = Z_n(K)$, 因而 n 維閉鏈間的一个同調式恰是一个等式, 所以 $\lambda z_n = 0$. 这方程給出 $\lambda = 0$. ▮

5.3 定理(Euler-Poincaré 公式) 設 K 是一个 n 維的有限复形,它的 q 維单形的个数是 α_q, 而且它的 q 維 Betti 数是 R_q, 則下述公式成立:

$$\sum_{q=0}^{n} (-1)^q \alpha_q = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q R_q.$$

公式中的第一个和, 通常用 $\chi(K)$ 表示, 叫作 K 的 **Euler-Poincaré 示性数.**

証 明 本定理是定理 B 2.9 (秩的可加性)的直接推論.

首先,設 K 的有向单形的一个基本組是 $\{s_i^q\}$, $q = 0, 1, \cdots, n$; $i = 1, 2, \cdots, \alpha_q$. 为着使記号簡单起見,用 C_q, Z_q, B_q, H_q 分別表示 $C_q(K)$, $Z_q(K)$, $B_q(K)$, $H_q(K)$; 然后鏈群 C_q 的一个基显然是 $\{s_i^q\}$, q 固定,因而 C_q 的秩

$$\rho(C_q) = \alpha_q, \quad q = 0, 1, \cdots, n.$$

其次,应用秩的可加性与命題 2.5(B_{-1} 理解为零群),得到

$$\begin{aligned}\alpha_q = \rho(C_q) &= \rho(Z_q) + \rho(C_q/Z_q) \\ &= \rho(Z_q) + \rho(B_{q-1}), \quad q = 0, 1, \cdots, n.\end{aligned}$$

再一次应用秩的可加性与同調群以及 Betti 数的定义,得到

$$\begin{aligned}\rho(Z_q) &= \rho(B_q) + \rho(Z_q/B_q) \\ &= \rho(B_q) + \rho(H_q) = \rho(B_q) + R_q, \quad q = 0, 1, \cdots, n.\end{aligned}$$

最后，結合这二个式子，得到

$$\alpha_q = R_q + \rho(B_q) + \rho(B_{q-1}), \quad q = 0, 1, \cdots, n.$$

这里 $\rho(B_{-1}) = 0$，而且因为 K 是 n 維的，$\rho(B_n) = 0$. 从这最后的式子作示性数 $\chi(K)$，就得到 Euler-Poincaré 公式.]

因为将要証明同調群是多面体 $|K|$ 的拓扑不变量，所以 R_q 以及 Euler-Poincaré 公式中的第二个和也是 $|K|$ 的拓扑不变量. 显然易見 α_q 不是 $|K|$ 的拓扑不变量，依賴于 $|K|$ 的单純剖分 K. Euler-Poincaré 公式蘊涵，特别地，由非拓扑不变量 α_q 所作成的示性数 $\chi(K)$ 是拓扑不变量. 在 $|K|$ 是二維球时，$\chi(K) = 2$ 就是中学立体几何学中的 Euler 多面形定理.

以上是 $G=J$ 时的情形. 現在只簡略地指出 $G=J_p$ 时的情形，p 素数. 設 g 是 J_p 的一个生成元. 然后 $gs_1^q, gs_2^q, \cdots, gs_{\alpha_q}^q$ 是鏈 $C_q(K; J_p)$ 的一組生成元，而且 $C_q(K; J_p)$ 的每一个非零元素的阶是 p. 显然 $C_q(K; J_p)$ 的子群 $Z_q(K; J_p)$，$B_q(K; J_p)$ 的每一个非零元素的阶是 p. 不难証明，商群 $H_q(K; J)$ 的每一个非零元素的阶也是 p（复习題）. 然后如同从定理 B 4.4 得到定理 5.1 与 q 維 Betti 数的定义，从定理 3.4 得到推論 5.2，以及从定理 B 2.9 得到定理 5.3，現在从定理 B 4.5，从定理 3.4，以及从定理 B 2.10 分别得到下列結果.

5.4 定理 n 維的复形 K 的 q 維模 p（p 素数）同調群 $H_q(K; J_p)$ 能分解为 $R_q^{(p)}$ 个 J_p 的直和.]

$R_q^{(p)}$ 叫作 K 的 q 維模 p **Betti 数.**

5.5 推論 n 維复形 K 的零維模 p Betti 数 $R_0^{(p)}$ 等于 K 的連通分支的个数.]

5.6 定理 n 維复形 K 的 Euler-Poincaré 示性数

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q R_q^{(p)}. \ ]$$

例 从例 4.1 到例 4.7 中的討論，已可以得出所討論的复形的 Betti 数与撓系数等.

	Betti 数	示 性 数	撓 系 数
平　　环	$R_0=R_0^{(p)}=1,\ R_1=R_1^{(p)}=1,$ $R_2=R_2^{(p)}=0$	$\chi=0$	无
Möbius 带	$R_0=R_0^{(p)}=1,\ R_1=R_1^{(p)}=1,$ $R_2=R_2^{(p)}=0$	$\chi=0$	无
环　　面	$R_0=R_0^{(p)}=1,\ R_1=R_1^{(p)}=2,$ $R_2=R_2^{(p)}=1$	$\chi=0$	无
射影平面	$R_0=1,\ R_1=0,\ R_2=0;$ $R_0^{(2)}=1,\ R_1^{(2)}=1,\ R_2^{(2)}=1;$ $R_0^{(p)}=1,\ R_1^{(p)}=0,\ R_2^{(p)}=0,\ p>2$	$\chi=1$	只一个一維的撓系数$=2$
$n(\geqslant 0)$ 維单形	$R_0=R_0^{(p)}=1,\ R_i=R_i^{(p)}=0,$ $0<i\leqslant n$	$\chi=1$	无
$n(>0)$ 維球	$R_0=R_0^{(p)}=R_n=R_n^{(p)}=1,$ $R_i=R_i^{(p)}=0,\ 0<i<n$	$\chi=1+(-1)^n$	无
錐　　形	$R_0=R_0^{(p)}=1,\ R_i=R_i^{(p)}=0,\ 0<i$	$\chi=1$	无

习　　題

在习題 3 到 5 中，假設 Euler-Poincaré 公式是拓扑不变量.

1. 設一維的連通的复形 K 有 α_0 个頂点，α_1 条棱. 試利用 Euler-Poincaré 公式 $\alpha_0-\alpha_1=R_0-R_1$，証明：$K$ 恰可消去 $R_1=1-\alpha_0+\alpha_1$ 条棱的內点而仍旧連通.

2. 用 T 表示前一习題中那样地从 K 得到的复形. 試求出 T 的頂点个数、棱的个数与 Betti 数. 这样的 T 叫作一棵树.

試說明：任一連通的复形 K 上都存在一棵树 T，T 的每一棱是 K 的棱，而 T 的全体頂点恰是 K 的全体頂点.

3. 設 K 是一个二維的閉假流形. 試証明它的 $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ 满足下列式子：

$$3\alpha_2=2\alpha_1,\quad \alpha_1=3(\alpha_0-\chi(K)),\quad \alpha_0\geqslant\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24\chi(K)}).$$

4. 試証二維球、射影平面、环面的任何单純剖分必須满足下列不等式：

二維球: $\alpha_0 \geqslant 4$, $\alpha_1 \geqslant 6$, $\alpha_2 \geqslant 4$;

射影平面: $\alpha_0 \geqslant 6$, $\alpha_1 \geqslant 15$, $\alpha_2 \geqslant 10$;

环面: $\alpha_0 \geqslant 7$, $\alpha_1 \geqslant 21$, $\alpha_2 \geqslant 14$.

并試求环面的单純剖分,它实現 α_0, α_1, α_2 的最小值.

5. 設两个单純复形 K_1 与 K_2 恰只有一个公共的頂点. 用 $K_1 \vee K_2$ 表示它們的并集. 試用 K_1 与 K_2 的示性数表出 $K_1 \vee K_2$ 的示性数.

6. 用关联矩陣計算整同調群·典型基

定理 5.1 只說 n 維的有限复形 K 的整同調群 $H_q(K)$ 有直和分解,但并未給出 K 的 Betti 数与撓系数的具体计算法. 本节将利用 K 的关联矩陣来具体地算出 K 的 Betti 数与撓系数以及整同調群. 然后附带說明 K 的整数鏈群的典型基.

附录 B §§ 3~4 中的知識, 本节所需要的, 只是定理 B 3.5、定理 B 3.6 的証法,以及定理 B 4.4 的第二个結論.

設 K 是 n 維的有限复形,以

$$\{s_i^q\},\ q=0,\ 1,\ \cdots,\ n,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ \alpha_q$$

为有向单形的一个基本組. 对于一个固定的 q, 把 $\{s_i^q\}$ 叫作整数鏈群 $C_q=C_q(K)$ 的**自然基**. 在本节中,基的元素都看作有一定的次序; 例如自然基的次序就是 i 的值的自然次序. 把 s_i^{q+1} 与 s_j^q 的关联系数 $[s_i^{q+1}:s_j^q]$ 簡記为 a_{ij}^q, 因而得到矩陣 $A_q=(a_{ij}^q)$ (参看 § 2 中式(5)). 这些矩陣 A_q 叫作对于 C_{q+1} 与 C_q 的自然基而言的**关联矩陣**(图 15), $q=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$, 或簡称 K 的关联矩陣. 图 15 中不仅有矩陣 $A_q=(a_{ij}^q)$, 而且还有左纵列 $\{s_i^{q+1}\}$ 与上横行 $\{s_j^q\}$. 此后我們也把图 15 叫作图 A_q, 以与**矩陣** A_q 区别.

不难看出, K 的关联矩陣 A_q 完全給出复形 K 的頂点表(定义 1.14 后), 因而也完全决定 K 的拓扑性质. 特別地有下面的

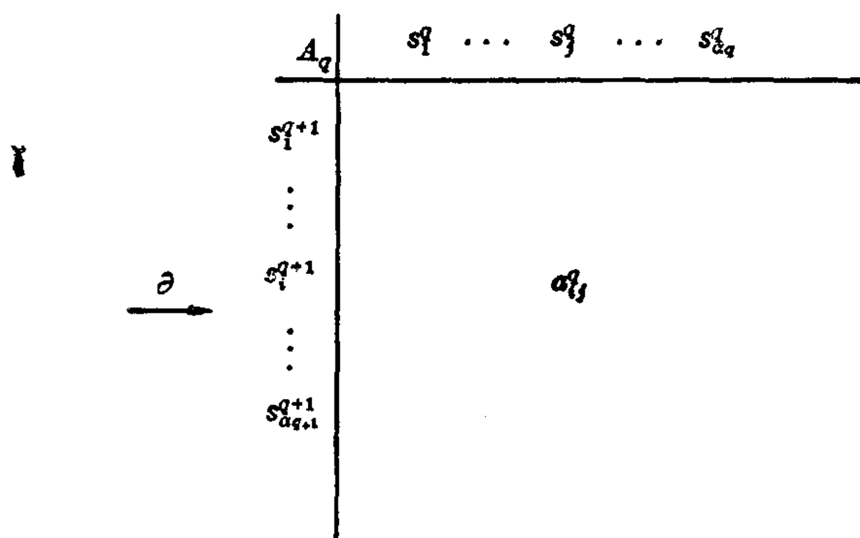


图 15

定理:

6.1 定理 設 K 是 n 維的有限复形，α_q 是 K 的 q 維单形的个数，$q=0, 1, \cdots, n$，而且 A_q 是 K 的关联矩陣，$q=0, 1, \cdots, n-1$. 設 β_q 是矩陣 A_q 的秩，而且 $\theta_q^1, \theta_q^2, \cdots, \theta_q^{\tau_q}$ 是矩陣 A_q 的、大于 1 的不变因子，θ_q^i 整除 θ_q^{i+1}. 則 K 的 q 維 Betti 数是

$$R_q=\alpha_q-\beta_q-\beta_{q-1},\ 0\leqslant q\leqslant n\ (\beta_{-1}=\beta_n=0), \tag{1}$$

K 的 q 維撓系数是 $\theta_q^1, \theta_q^2, \cdots, \theta_q^{\tau_q}$, $1\leqslant q\leqslant n-1$，而且 K 无零維的与 n 維的撓系数.

換句話說，K 的整同調群 $H_q(K)$ 的直和分解如下:

$$H_q(K)=\underbrace{J+J+\cdots+J}_{R_q}+J_{\theta_q^1}+J_{\theta_q^2}+\cdots+J_{\theta_q^{\tau_q}},\quad 0<q<n;$$

$$H_q(K)=\underbrace{J+J+\cdots+J}_{R_q},\quad q=0, n.$$

在不变因子的唯一性的意义下(定理 B 3.5 的証明的末尾)或在定理 B 4.4 的第二个結論的意义下，这直和分解是唯一的.

証 明 首先考虑零維 Betti 数与零維撓系数. 本定理是通过关联矩陣来求得它們的值的，而推論 5.2 的証明則用另一方式

(用定理 3.4). 留給讀者証明这两种方式的結論是一致的(見习題 1).

其次,因为无关联矩陣 A_n, n 維的撓系数与关联矩陣无干. 本定理中說 K 无 n 維的撓系数,只是重复推論 5.2 中的这个結論.

本定理中其他結論的証明分成四步.

1) 矩陣方程与基的变換 命題 2.2 就是說矩陣方程

$$A_q A_{q-1}=0, \quad q=1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

成立. 对于一个固定的 q, 我們将要象在定理 B 3.5 的証明中一样,用矩陣的初等变換把矩陣 A_q 变成典型式. 因为边緣运算 ∂ 是綫性的, 象在引理 B 3.6 的証明中一样, 矩陣 A_q 的一个初等变换相当于变 C_{q+1} 的或 C_q 的自然基为一个新基(参看引理 B 3.6 的証明中的 i) 到 iv) 与 B § 3 中习題 3). 設这初等变換变矩陣 A_q 为 $\overline{A}_q$; 我們就把矩陣 $\overline{A}_q$ 叫作对于 C_{q+1} 与 C_q 的这一对新基 (其中一个还是自然基)而言的关联矩陣. 如果这初等变換相当于变 C_q 的自然基为一个新基,則又有对于 C_q 的这个新基与 C_{q-1} 的自然基而言的新关联矩陣 $\overline{A}_{q-1}$. 因为边緣的边緣等于零,仍有

$$\overline{A}_q \overline{A}_{q-1}=0. \tag{3}$$

以上只說明了,当 C_{q+1} 与 C_{q-1} 都用自然基,而 C_q 用矩陣的一个初等变換所給出的新基时, 式(3)成立. 一般地, 如果 C_{q+1}, C_q 与 C_{q-1} 都各用一个新基,而每一个新基又是由关联矩陣 A_q 与 A_{q-1} 的若干个初等变換給出的,則对于这些新基而言的矩陣 $\overline{A}_q$ 与 $\overline{A}_{q-1}$ 仍滿足式(3). 詳細証明留給讀者(見习題 2).

2) 取定各維鏈群 C_q 的一个新基, 从 $q=0$ 开始, 然后 $q=1$, 一直到 $q=n$, 把所有的图 A_q 变成所需要的图 Δ_q. 从 $q=0$ 时的图 A_0 开始. 按照定理 B 3.5 的証法, 用矩陣的初等变換把矩陣 A_0 变成典型式 A_0' (定理 B 3:5 中記作 B). 設这些初等变換相当于把 C_1 与 C_0 的自然基变成新基 $\{W_1, Z_1'\}$ 与 $\{Z_0, W_0\}$. 然后根

据1)，我們有图 A_0'（图16）．再通过把一維基 $\{W_1, Z_1'\}$ 变成新基 $\{Z_1', W_1\}$（相当于矩陣的横行互换），把图 A_0' 变成图 A_0''（图 A_0' 与图 A_0'' 中上横行 $\{Z_0, W_0\}$ 同，此后将不再改变．）

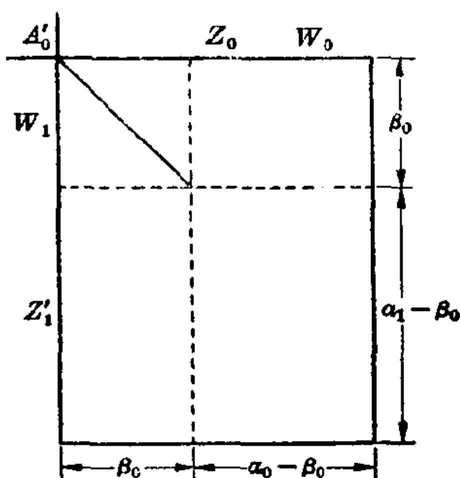


图 16

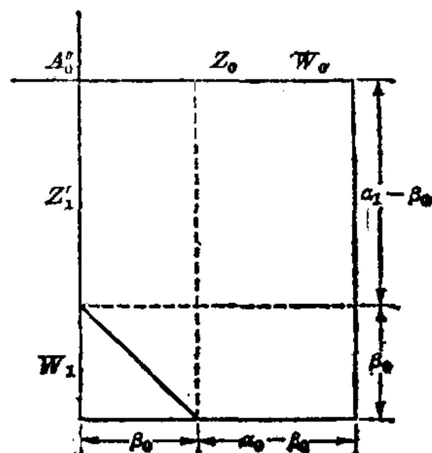


图 17

現在作对于 C_2 的自然基与 C_1 的基 $\{Z_1', W_1\}$ 而言的关联矩陣 A_1^*．因为 $A_1^*A_0''=0$，图 A_1^* 的最后 β_0 个纵列中的元素都是零（图18）．象上面把图 A_0 变成图 A_0' 一样，現在要把图 A_1^* 变成图 A_1'（图19）．因为矩陣 A_1^* 的上述性质，要把图 A_1^* 变成图 A_1'，只需要对于矩陣 A_1^* 的最前 $\alpha_1-\beta_0$ 个纵列与对于全体 α_2 个横行各作若干初等变换．后者相当于把 C_2 的自然基变成一个新基，与图 A_0'' 无

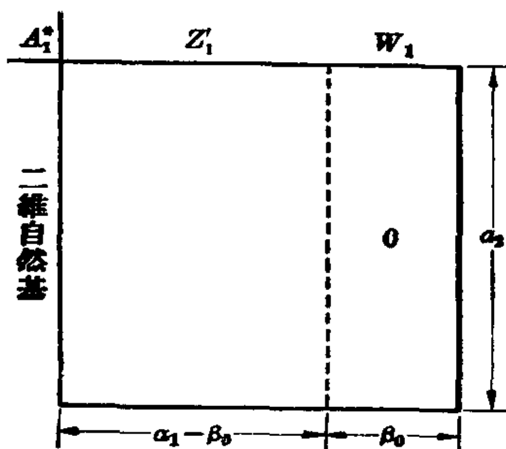


图 18

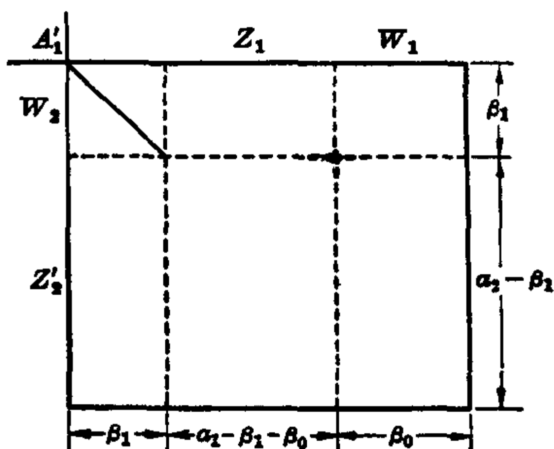


图 19

干．設前者相当于把 C_1 的基 $\{Z_1', W_1\}$ 中的部分 Z_1' 变成 Z_1．把 Z_1' 变成 Z_1 的这些基的变换又相当于对于矩陣 A_0'' 的最前 $\alpha_1-\beta_0$ 个横行作初等变换．因为这些横行中的元素都是零，这些初等变换并不改变矩陣 A_0''，只把图 A_0'' 变成图 Δ_0（图 20）；图 A_0'' 与图 Δ_0 的区别只是它們的左纵列不同．

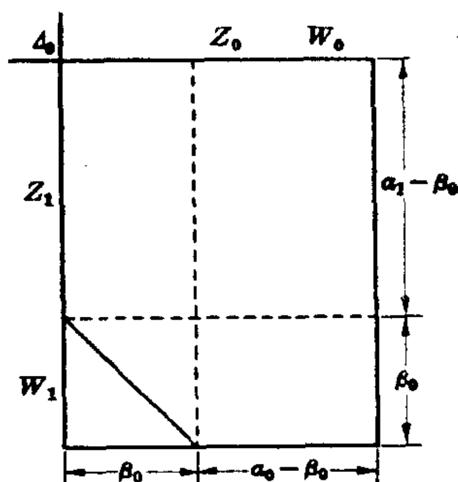


图 20

以上把图 A_0 变成了最后的图 Δ_0．所經历的諸阶段可以总結为：

$$图\ A_0 \to 图\ A_0' \to 图\ A_0'' \to 图\ A_1^* \to 图\ A_1' \to 图\ \Delta_0.$$

图 Δ_0 的上横行 $\{Z_0, W_0\}$ 与图 A_0'，图 A_0'' 的相同；它是我們取定的 C_0 的基，在此后証明中将不再改变．

現在从 A_1^* 开始，如同从图 A_0 得到图 Δ_0，經历下列阶段得到最后的图 Δ_1：

$$图\ A_1^* \to 图\ A_1' \to 图\ A_1'' \to 图\ A_2^* \to 图\ A_2' \to 图\ \Delta_1.$$

图 Δ_1 的上横行 $\{Z_1, W_1\}$ 与图 A_1'，图 A_1'' 的相同，是我們取定的 C_1 的基．重复这方法，一直到最后的 Δ_{n-2} 与 Δ_{n-1}：

$$图\ A_{n-2}^* \to 图\ A_{n-2}' \to 图\ A_{n-2}'' \to 图\ A_{n-1}^* \to 图\ A_{n-1}' \to 图\ \Delta_{n-2},$$

图 Δ_{n-2} 的上横行 $\{Z_{n-2}, W_{n-2}\}$ 与图 A_{n-2}'，A_{n-2}'' 的相同，它是我們取定的 C_{n-2} 的基；

$$图\ A_{n-1}^* \to 图\ A_{n-1}' \to 图\ A_{n-1}'' = 图\ \Delta_{n-1},$$

图 Δ_{n-1} 的上横行 $\{Z_{n-1}, W_{n-1}\}$（与图 A_{n-1}'，图 A_{n-1}'' 的相同）与左纵列 $\{Z_n, W_n\}$ 分别是我們取定的 C_{n-1} 的基与 C_n 的基．

图 A_q 見图 21，$0\leqslant q\leqslant n-1$．矩陣 A_q 的不变因子現在記作 $\delta_q=(\delta_q^1, \delta_q^2, \cdots, \delta_q^{\beta_q})$（定理 B3.5 中記作 d_i）．

3）基 $\{Z_q, W_q\}$ 的討論 图 Δ_q 的左纵列 $\{Z_{q+1}, W_{q+1}\}$ 与上

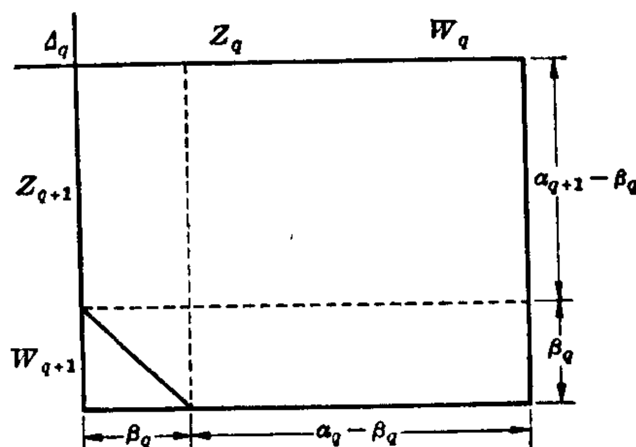


图　21

横行 $\{Z_q, W_q\}$ 分别是 C_{q+1} 与 C_q 的基，$0\leqslant q\leqslant n-1$. 把 W_{q+1} 中的元素依次記作

$$w_{q+1}^i,\quad q=0, 1, \cdots, n-1,\quad i=1, 2, \cdots, \beta_q, \tag{4}$$

把 Z_q 中的最前 β_q 个元素依次記作

$$u_q^i,\quad q=0, 1, \cdots, n-1,\quad i=1, 2, \cdots, \beta_q; \tag{5}$$

然后有

$$\partial w_{q+1}^i=\delta_q^i u_q^i,\quad q=0, 1, \cdots, n-1,\quad i=1, 2, \cdots, \beta_q. \tag{6}$$

按照这样的記法，式(4)中不包含 w_0^i，而且式(5)中不包含 u_n^i. 另一方面，对于 $1\leqslant q\leqslant n$, 从图 Δ_{q-1} 就可以看出：C_q 的基的两部分 Z_q 与 W_q 分别指的是閉鏈部分与非閉鏈部分. 对于 $q=0$, 也应保持这种記法；然后，因为零維鏈都是閉鏈，故 C_0 的基只是閉鏈，即应說原来取的 C_0 的基 $\{Z_0, W_0\}$ 中的 W_0 不存在. 再者，式(6)表示 $\delta_q^i u_q^i$ 是边緣鏈，$0\leqslant q\leqslant n-1$. 因为 n 維的复形 K 上无 n 維的边緣鏈，故 Z_n 中无 u_n^i.

一个 u_q^i 决不同于一个 w_q^i，因为前者是閉鏈而后者非閉鏈. 在一般的情形下，Z_q 不只包含元素 u_q^i，还包含其他的元素；把后者依次記为

$$v_q^i,\quad q=0, 1, \cdots, n,\quad i=1, 2, \cdots, R_q; \tag{7}$$

因为C_q的基$\{Z_q, W_q\}=\{u_q, v_q, w_q\}$有$\alpha_q$个元素，故这里的$R_q$是由式(1)决定的.

4) 求閉鏈群、边緣鏈群与同調群 現在已知道整数鏈群$C_q(K)$是以$\{u_q, v_q, w_q\}$为基的自由群. 而且u_n与w_0不存在. 复形K的任一整数鏈必是

$$c_q=\sum\lambda_i u_q^i+\sum\mu_i v_q^i+\sum\nu_i w_q^i,$$

这里的λ_i, μ_i与ν_i都是整数. 根据式(6)，在$q>0$时，$\partial c_q=0$当而且只当每一个$\nu_i=0$. 故对于任意q，閉鏈群$Z_q(K)$以

$$Z_q=\{u_q^1, u_q^2, \cdots, u_q^{\beta_q}; v_q^1, v_q^2, \cdots, v_q^{R_q}\}$$

为基. Z_n中当然无u_n.

考虑任一閉鏈

$$z_q=\sum\lambda_i u_q^i+\sum\mu_i v_q^i.$$

根据式(6)，在$q<n$时，z_q是一个边緣鏈，当而且只当存在整数η_i使得

$$z_q=\partial\sum\eta_i w_{q+1}^i=\sum\eta_i\delta_q^i u_q^i;$$

因而当而且只当

$$\lambda_i=\eta_i\delta_q^i,\quad \mu_i=0,$$

即当而且只当

$$\lambda_i\equiv 0\ (\text{模}\ \delta_q^i),\quad \mu_i=0.$$

故对于$q<n$，边緣鏈群$B_q(K)$以

$$\{\delta_q^1 u_q^1, \delta_q^2 u_q^2, \cdots, \delta_q^{\beta_q} u_q^{\beta_q}\}$$

为基. 容易看出，z_n是边緣鏈当而且只当$z_n=0$；因而$B_n(K)=0$.

因为不变因子記号与撓系数記号之間的关系，我們有

$$\begin{cases}\delta_q^{i_q}=1, & i_q=1, 2, \cdots, \beta_q-\tau_q,\\ \delta_q^{\beta_q-\tau_q+j_q}=\theta_q^{j_q}, & j_q=1, 2, \cdots, \tau_q.\end{cases}\tag{8}$$

然后根据命題B 2.4以及矩陣A_0无大于1的不变因子，我們得到本定理中所說的同調群$H_q(K)$的直和分解与其他結論. ▌

附　記　本証明还說明了 β_q 是边緣鏈群 $B_q(K)$ 的秩. 再者，式(1)就是定理 5.3 的証明中的最后一个方程，故从式(1)立即推出定理 5.3.

从定理 6.1 的証明，很容易得到下面的定理与推论.

6.2 定理（典型基定理）　設 K 是 n 維有限复形，而且

$\alpha_q=K$ 的 q 維单形的个数，

$\beta_q=B_q(K)$ 的秩或 K 的关联矩陣 A_q 的秩，

$R_q=K$ 的 q 維 Betti 数，

$\tau_q=K$ 的 q 維撓系数 $\theta_q^{j_q}$ 的个数.

則对于 $q=0, 1, \cdots, n$，鏈群 $C_q(K)$ 各有由下列五种鏈組成的一个基：

$$\begin{aligned}
&a_q^{i_q}, \quad i_q=1, 2, \cdots, \beta_q-\tau_q,\\
&b_q^{j_q}, \quad j_q=1, 2, \cdots, \tau_q,\\
&c_q^{k_q}, \quad k_q=1, 2, \cdots, R_q,\\
&d_q^{i_{q-1}}, \ i_{q-1}=1, 2, \cdots, \beta_{q-1}-\tau_{q-1},\\
&e_q^{j_{q-1}}, \ j_{q-1}=1, 2, \cdots, \tau_{q-1}
\end{aligned}$$

（其中无 $b_0^{j_0}$, $d_0^{i_{-1}}$, $e_0^{j_{-1}}$，无 $e_1^{j_0}$，无 $a_n^{i_n}$, $b_n^{j_n}$），而且边緣同态由下列方程决定：

$$\partial a_q^{i_q}=0, \quad \partial b_q^{j_q}=0, \quad \partial c_q^{k_q}=0,$$

$$\partial d_q^{i_{q-1}}=a_{q-1}^{i_{q-1}}, \quad \partial e_q^{j_{q-1}}=\theta_{q-1}^{j_{q-1}} b_{q-1}^{j_{q-1}}.$$

这些基叫作鏈群的**一組典型基**. 請参看定理 5.3.

証　明　为着把等于 1 的不变因子与大于 1 的不变因子(即撓系数)区别出来，式(8)中用了两个上标 i_q 与 j_q 来替代不变因子 δ_q^i 的上标 i，而且 i_q 与 j_q 所取的値就是本定理中所說的. 現在对于鏈 u_q^i 同样地改变記法：

$$u_q^{i_q}=a_q^{i_q}, \quad u_q^{\beta_q-\tau_q+j_q}=b_q^{j_q};$$

再根据式(6)，对于鏈 w_{q+1}^i 也同样地改变記法：

$$w_{q+1}^{i_q}=d_{q+1}^{i_q},\quad w_{q+1}^{\beta_q-\tau_q+j_q}=e_{q+1}^{j_q}.$$

最后,为着记法整齐起见,再把式(7)中的v_q^i改为$c_q^{k_q}$. 这就给出本定理中所说的、$C_q(K)$的基.

决定边缘同态的前三个方程是明显的,后两个方程是式(6)的改写. ▌

6.3 推论 沿用定理 6.2 中的记号. 则

$Z_q(K)$是以$\{a_q^{i_q}, b_q^{j_q}, c_q^{k_q}\}$为基的自由群,

$B_q(K)$是以$\{a_q^{i_q}, \theta_{j_q}^q b_q^{j_q}\}$为基的自由群; 因而

$H_q(K)$是以$\{c_q^{k_q}\}$为基的自由群与所有以$b_q^{j_q}$为生成元的$\theta_{j_q}^q$阶循环群的直和.

习 题

1. 设K, α_q, A_q, β_q如定理 6.1 中. 试证: 如果K恰有R_0个连通分支,则A_0无大于 1 的不变因子,而且$R_0=\alpha_0-\beta_0$.

[提示: 先考虑$R_0=1$, 用 B § 3 的习题 5.]

2. 试证定理 6.1 的证明第一步末尾的方程(3).

3. 如同图 21 总结了定理 6.1, 试作一图总结定理 6.2.

4. 设复形K有 4 个顶点a^1, a^2, a^3, a^4, 5 条棱a^1a^2, a^2a^3, a^3a^1, a^2a^4, a^3a^4, 一个二维单形$a^1a^2a^3$. 1) 试用关联矩阵求K的整同调群(用最简捷的方法). 2) 试求K的整数链群的一组典型基.

5. 试证: 如果n维的闭假流形能定向, 则它无$n-1$维的挠系数; 如果它不能定向,则它恰有一个$n-1$维的挠系数等于 2.

[提示: 参看 B § 3 的习题 6. 也可以不用关联矩阵证明.]

第四章　同調群的不变性·映射的同調性质

复形的同調群既是拓扑不变性(定理 5.10)，又是倫型不变性(定理 6.5)，而且后者蘊涵前者. 本章前五节的目的是給出同調群的拓扑不变性的經典証明(定理 5.10 的証明). 这証明中的两个关鍵概念是复形的重分(§3)与映射的单純逼近(§5)；所以可以說，整个的前五节基本上只是这一个証明.

从这前五节还可以再进一步：引进映射的同調性质这概念来証明同調群的倫型不变性. 这就是§6 的內容. 虽然倫型不变性蘊涵拓扑不变性，但我們还在§5 中保留拓扑不变性的定理 5.10 及其上述的經典証明；我們这样作，希望一方面既反映出同調群不变性证明的历史发展，另方面也使读者在初次讀本书时有可能删去§6.

1. 引言·鏈映射与鏈同倫

本章中的諸节基本上是一环扣一环的一个整体. 为着使本章易于理解，我們先在本节中扼要地說明本章的目的以及达到目的的步驟. 同时在本节中先抽象地引进鏈映射与鏈同倫这两个基本概念(几何意义見以后有关的各节)，可以使以后的討論簡单而且方便.

同調群的三种不变性　設 K 与 L 是复形. 倫型不变性的定理是說：如果多面体 $|K|\simeq|L|$(定义 II 9.4)，則K与 L 的同維的同調群同构. 因为 $|K|\cong|L|$(定义 I 3.4)$\Rightarrow|K|\simeq|L|$，所以作

为倫型不变性定理的推論，有拓扑不变性定理：如果 $|K|\cong|L|$，則 K 与 L 的同維的同調群同构．我們說 K 是 L 的一个**重分**，或 L 重分为 K，如果 K 与 L 具有下述的两性质：a) K 的每一单形是 L 的一个单形的子集，b) L 的每一单形是 K 的若干单形的幷集．在条件 a) 下，条件 b) 等价于下述性质：b') $|L|=|K|$．我們将只考慮 L 的一种特殊的重分 K，叫作“重心重分”；这时候仍有 $|L|=|K|$．因为 K 是 L 的重心重分 $\Rightarrow|K|\cong|L|$，所以应該能从拓扑不变性定理立刻推知重分不变性定理：如果 K 是 L 的重心重分，則 K 与 L 的同維同調群同构．但如同已經說过的，我們将先証明重分不变性定理 4.3，然后在它的基础上来証明拓扑不变性定理 5.10 与倫型不变性定理 6.5.

研究这三种不变性問題时的共同出发点是連續映射

$$\varphi: K\to L;$$

基本想法是如同映射的同調性质的定理中所說的，φ 誘导出 K 的各維同調群到 L 的同維同調群的一个同态；要想証明的是，重分不变性問題中的恒同映射 φ，拓扑不变性問題中的同胚 φ，与倫型不变性問題中的同倫等价 φ，它們所誘导出的同态都是同构.

問題 I 与鏈映射 因为同調群是通过鏈群来定义的，所以发生的第一个問題是

問題 I 如何把映射 $\varphi: K\to L$ 联系上从鏈群 $C_q(K)$ 到 $C_q(L)$ 的一个对应，使得这对应給出从 $H_q(K)$ 到 $H_q(L)$ 的一个同态？

（在三种不变性問題的討論时，如何把 φ 联系上这种的一个对应，見命题 2.3，§3 中标准映射与标准鏈映射，定理 5.6 与 5.8，定理 6.1.）[*] 至于什么样的对应誘导出同調群之間的同态，其答案

[*] 括号中的一句，可候到讀完本章时才讀.

是下面定义的鏈映射.

1.1 定义 如果复形 K 与 L 的鏈群之間的一序列的同态 $f=\{f_q\}$

$$f_q\colon C_q(K)\to C_q(L) \tag{1}$$

与边緣同态 $\partial=\{\partial_q\}$ 可交换，即

$$\partial_q f_q=f_{q-1}\partial_q, \tag{2}$$

则 $f=\{f_q\}$ 叫作从 K 到 L 的一个**鏈映射**.

我們常常把式(1)与式(2)分别簡写成

$$f\colon C_q(K)\to C_q(L) \tag{1'}$$

与

$$\partial f_q=f_{q-1}\partial; \tag{2'}$$

式(2′)可理解为下面的图表具有交换性：

$$\begin{array}{ccc} C_q(K) & \xrightarrow{f_q} & C_q(L) \\ \partial\downarrow & & \downarrow\partial \\ C_{q-1}(K) & \xrightarrow{f_{q-1}} & C_{q-1}(L). \end{array}$$

1.2 命题 从复形 K 到复形 L 的一个鏈映射 $f=\{f_q\}$

$$f\colon C_q(K)\to C_q(L)$$

誘导出一序列的同态 $f_*=\{f_{q*}\}$

$$f_{q*}\colon H_q(K)\to H_q(L). \tag{3}$$

更明确地說，如果 z 是 K 的一个 q 維閉鏈，則 $f_q(z)$ 是 L 的 q 維閉鏈；而且

$$f_{q*}(\overset{*}{z})=(f_q(z))^*, \tag{4}$$

这里 $\overset{*}{z}$, $(f_q(z))^*$ 分别表示 K 上的閉鏈 z 的同調类，L 上的閉鏈 $f_q(z)$ 的同調类.

我們也常常把式(3)簡写成

$$f_*\colon H_q(K)\to H_q(L). \tag{3'}$$

証 明 把 f_q 限制在 $Z_q(K)$ 与 $B_q(K)$ 上,則分別有

$$f_q\colon\ Z_q(K)\to Z_q(L),$$

$$f_q\colon\ B_q(K)\to B_q(L).$$

事实上,設鏈 $z\in Z_q(K)$;則从式 (2), $\partial f_q(z)=f_q(\partial z)=f_q(0)=0$, 即 $f_q(z)\in Z_q(L)$. 再設鏈 $b\in B_q(K)$; 因而存在鏈 $c\in C_{q+1}(K)$, 使得 $b=\partial c$. 从式 (2), $f_q b=f_q\partial c=\partial f_{q+1}c$; 因为 $f_{q+1}c\in C_{q+1}(L)$, 所以 $f_q b\in B_q(L)$.

然后,用定理 B1.4 得本命題的結論. ▌

1.3 命題 設 K, L, M 都是复形. 如果 $f=\{f_q\}$ 与 $g=\{g_q\}$

$$f\colon\ C_q(K)\to C_q(L),\quad g\colon\ C_q(L)\to C_q(M)$$

是鏈映射,則

$$gf\colon\ C_q(K)\to C_q(M)$$

也是鏈映射,而且誘导出的同态

$$(gf)_*=g_*f_*\colon\ H_q(K)\to H_q(M).\ ▌$$

問題 II 与鏈同倫 在把連續映射 $\varphi\colon K\to L$ 联系上一个鏈映射 $f\colon\ C_q(K)\to C_q(L)$ 时, f 实际上不是唯一的. 所以发生第二个問題

問題 II 两个鏈映射 $f, g\colon C_q(K)\to C_q(L)$ 在什么条件下誘导出同調群之間的同一个同态 $f_*=g_*\colon H_q(K)\to H_q(L)$?

下面定义的鏈同倫是一个充分条件. [至于在三种不变性問題的討論时,如何証明鏈映射 f 与 g 滿足这充分条件, 見定理 4.1 与例 4.5, 命題 5.9 中的 (iii), 定理 6.1 的証明.]*)

1.4 定义 設 $f, g\colon C_q(K)\to C_q(L)$ 是从复形 K 到复形 L 的两个鏈映射. 如果存在一序列的同态(非鏈映射!) $D=\{D_q\}$

*) 括号中的一句,可候到讀完本章时才讀.

$$D_q\colon C_q(K)\to C_{q+1}(L),$$

使得

$$\partial_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q=g_q-f_q, \tag{5}$$

我們就說 f 与 g 是**鏈同倫的**，記作 $f\simeq g$；而且說 D 是从 f 到 g 的一个**鏈倫移**，記作 $D\colon f\simeq g$. $f\simeq g$ 叫作一个**鏈同倫式**.

如果也用下面的图表来帮助理解式(5)，則

$$\begin{array}{ccc} & & C_{q+1}(L) \\ & \nearrow^{D_q} & \downarrow \partial \\ C_q(K) & \xrightarrow{g_q-f_q} & C_q(L) \\ \partial \downarrow & \nearrow_{D_{q-1}} & \\ C_{q-1}(K) & & \end{array}$$

它不具有交换性.

1.5 命題　鏈同倫的两个鏈映射

$$f\simeq g\colon C_q(K)\to C_q(L)$$

誘导出同調群之間的相同的同态

$$f_*=g_*\colon H_q(K)\to H_q(L).$$

証　明　設 z 是 K 的任一个 q 維閉鏈. 从式(5)得 $g_q(z)\sim f_q(z)$ 在 L 上. 然后从式(4)得 $g_{q*}(\dot{z})=f_{q*}(\dot{z})$. ▌

要完成同調群不变性的証明，还有第三个問題

問題 III　在映射 $\varphi\colon K\to L$ 是恒同映射，或同胚，或同倫等价时，如何証明所联系上的鏈映射 $f\colon C_q(K)\to C_q(L)$ 誘导出同調群之間的同构?

(答案見不变性定理 4.3, 5.10, 6.5 的証明.)*)

*) 括号中的一句，可候到讀完本章时才讀.

系数群 G 在以上的討論中我們都限于用整数加群 J 作系数群. 我們現在要說明, 以上的討論都能自然地而且很容易地推广到任意系数群 G. 我們以定义 1.1 与命題 1.2 为例.

先推广定义 1.1. 設 s_i 是 K 的 q 維有向单形, $x=\sum\lambda_i s_i\in C_q(K)$. 因为定义 1.1 中的 ∂ 与 f 都是同态, 所以它們都是綫性的, 即

$$\partial x=\sum\lambda_i\partial s_i,\quad f_q(x)=\sum\lambda_i f_q(s_i).$$

在有了定义 1.1 中的鏈映射 $f=\{f_q\}$ 之后, 对于 $y=\sum g_i s_i\in C_q(K;G)$, 我們定义

$$f_{q,G}=\sum g_i f_q(s_i),$$

得到一序列的同态 $f_G=\{f_{q,G}\}$,

$$f_G:\ C_q(K;G)\to C_q(L;G).$$

容易驗証, 因为 f 是鏈映射, f_G 也滿足

$$\partial f_{q,G}=f_{q-1,G}\partial.$$

于是, 每一个鏈映射 f 給出一个对应的鏈映射 f_G.

再推广命題 1.2: 一个鏈映射 $f_G=\{f_{q,G}\}$ 誘导出一序列的同态 $f_{*G}=\{f_{q*,G}\}$

$$f_{q*,G}:\ H_q(K;G)\to H_q(L;G).$$

証明与命題 1.2 的証明形式上是相同的.

为簡明与方便起見, 本章中此后所有討論都只限于用系数群 J. 現在我們只指出, 本章中所有討論都可以如此推广, 使得所有結論对于任意系数群 G 都成立.

习　　題

1. 試証命題 1.3.

2. 試証: 鏈映射 $f,g: C_q(K)\to C_q(L)$ 的鏈同倫关系 $f\simeq g$ 是一个等价关系, 即它具有反身性、对称性与傳遞性.

3. 設 $f\simeq g: C_q(K)\to C_q(L)$, $f'\simeq g': C_q(L)\to C_q(M)$ 是两对鏈同倫的鏈映射, 而且相应的鏈倫移分别是 D 与 D'. 試求鏈倫移来証明 $f'f\simeq g'g: C_q(K)\to C_q(M)$.

[提示: 先証明 $f'f\simeq f'g$ 与 $f'g\simeq g'g$.]

2. 单純映射

本节介紹的单純映射是一种特别簡单的(連續)映射．它旣具有明显的几何直观，又自然地誘导出一个鏈映射．等到将来(§5)証明了任一映射都可以用单純映射来“逼近”之后，就解决了問題I．

单形的单純映射　首先推广命題I1.5的証明中的討論．設 $\underline{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 与 $\underline{t}^r=(b^0, b^1, \cdots, b^r)$ 分别是欧几里得空間 E^m 与 E^n 中的单形(未假設 $\underline{t}^r$ 是自然的单形)．設有頂点間的一个单値对应(不必是一一的对应)

$$f_0:\ a^i\to b^{j(i)}=f_0(a^i).$$

現在对于 $\underline{s}^q$ 的任一点

$$x=\lambda_0a^0+\lambda_1a^1+\cdots+\lambda_qa^q,$$

作 f_0 的綫性扩張：

$$\underline{f}(x)=\lambda_0f_0(a^0)+\lambda_1f_0(a^1)+\cdots+\lambda_qf_0(a^q).\tag{1}$$

$\underline{f}:\ \underline{s}^q\to\underline{t}^r$ 叫作由 f_0 决定的映 $\underline{s}^q$ 到 $\underline{t}^r$ 的**单純映射**．

我們現在来証明 $\underline{f}$ 連續．显然有 $\underline{f}(a^i)=f_0(a^i)$．因为 f_0 可能把 $\underline{s}^q$ 的若干个不同的頂点映成 $\underline{t}^r$ 的同一个頂点，而且 $\underline{t}^r$ 的某一頂点也可能不是 $\underline{s}^q$ 的頂点的 f_0 象，故我們把式(1)改写成

$$\underline{f}(x)=\mu_0b^0+\mu_1b^1+\cdots+\mu_rb^r,\tag{2}$$

这里的 μ_j 是式(1)中出現的全体 b^j 的系数 λ_i 的和，而且 $\mu_j=0$ 如果式(1)中无 b^j 出現．因为 $\lambda_i\geqslant0$，而且它們的和等于1，所以 μ_j 也如此；即 $\underline{f}(x)\in\underline{t}^r$．更明确地說，如果消去式(2)中恒等于零的那些項，而且用 $\underline{t}^k$ 表示 $\underline{t}^r$ 的、以那些在式(2)中保留下的 b^j 为頂点的面，則 $\underline{f}(\underline{s}^q)=\underline{t}^k$．因为 $\underline{f}(x)$ 是 $\underline{s}^q$ 中的点 x 的坐标 λ_i 的綫性函数，可知 $\underline{f}$ 是連續的．▌

例 2.1 設 $q=3$, $r=2$; $f_0(a^0)=f_0(a^1)=b^0$, $f_0(a^2)=f_0(a^3)=b^1$. 然后 $\mu_0=\lambda_0+\lambda_1$, $\mu_1=\lambda_2+\lambda_3$, $\mu_2=0$;

$$\underline{f}(x)=(\lambda_0+\lambda_1)b^0+(\lambda_2+\lambda_3)b^1;$$

而且 $\underline{t}^k=(b^0, b^1)$, $k=1$.

如果还有 g_0 是从 $\underline{t}^r$ 的頂点到另一单形 $\underline{u}^p=(c^0, c^1, \cdots, c^p)$ 的頂点的一个单值对应，而且 $\underline{g}: \underline{t}^r\to\underline{u}^p$ 是由 g_0 决定的单純映射，則 $\underline{g}\underline{f}: \underline{s}^q\to\underline{u}^p$ 是由 g_0f_0 决定的单純映射. 这是因为

$$\underline{g}\underline{f}(x)=\lambda_0g_0f_0(a^0)+\lambda_1g_0f_0(a^1)+\cdots+\lambda_qg_0f_0(a^q).$$

复形的单純映射 如同定理 III 1.11 (复形 K 同胚于某一自然单形的一个子复形 N) 是 q 維单形同胚于 q 維的自然单形的推广，現在我們要定义的映 K 到另一复形 L 的单純映射是前面所說的单形到单形的单純映射的推广.

2.1 定义 設 K 与 L 是两个复形，它們的頂点分别是

$$\{a^i\}, i=1, 2, \cdots, k, \quad \{b^j\}, j=1, 2, , \cdots, l.$$

設有頂点間的一个单值对应

$$f_0:\ a^i\to b^{j(i)}=f_0(a^i)$$

具有下述性質: f_0 把 K 的每一个单形的所有頂点映到 L 的一个单形的頂点. 現在对于 $|K|$ 的每一点

$$x=\lambda_0a^0+\lambda_1a^1+\cdots+\lambda_ka^k$$

[这里的 $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 限制在 K 的同胚复形 N 上; 見命題 III 1.11 的証明中. 还不妨假設 K 就是 N.], 作 f_0 的綫性扩張:

$$\underline{f}(x)=\lambda_0f_0(a^0)+\lambda_1f_0(a^1)+\cdots+\lambda_kf_0(a^k).$$

$\underline{f}: K\to L$ 叫作由 f_0 决定的、映 K 到 L 的**单純映射**.

我們要証明 $\underline{f}$ 連續. 事实上，如果 f_0 把 K 的一个单形 $\underline{s}^q$ 的所有頂点映成 L 的一个单形 $\underline{t}^h$ 的頂点，則 $\underline{f}|\underline{s}^q$ 就是映 $\underline{s}^q$ 成 $\underline{t}^h$ 的单純映射，因而連續. 如果 f_0 把 K 的 $\underline{s}_1^{q_1}$ 与 $\underline{s}_2^{q_2}$ 映成 L 的 $\underline{t}_1^{h_1}$ 与 $\underline{t}_2^{h_2}$,

则显然 f_0 把 $\underline{s}_1^{q_1}$ 与 $\underline{s}_2^{q_2}$ 的公共面 $\underline{s}$（如果有公共面）映到 $\underline{t}_1^{p_1}$ 与 $\underline{t}_2^{p_2}$ 的公共面 $\underline{t}$. 然后根据 $\underline{f}$ 的定义,限制在 $\underline{s}$ 上的 $\underline{f}|\underline{s}_1^{q_1}$ 与 $\underline{f}|\underline{s}_2^{q_2}$ 同是由限制在 $\underline{s}$ 的頂点上的 f_0 所决定的单純映射. 所以根据第二章 §2 中的习题 4, $\underline{f}$: $K\to L$ 連續. ］

附　記　单純映射 $\underline{f}: K\to L$ 把 K 的每一个单形 $\underline{s}^q$ 映成 L 的一个单形 $\underline{t}^h$, 而且 $\underline{f}|\underline{s}^q$ 是仿射映射或退化的仿射映射.

容易証明下述命題:

2.2 命題　設 K, L, M 都是复形. 如果 $\underline{f}: K\to L$ 与 $\underline{g}: L\to M$ 都是单純映射, 分别由頂点对应 f_0, g_0 决定的, 則由頂点对应 g_0f_0 决定的单純映射 $\underline{h}: K\to M$ 就是 $\underline{g}\underline{f}$:

$$\underline{h}=\underline{g}\,\underline{f}:\ K\to M.\ ］$$

单純鏈映射　現在說明单純映射如何誘导出(唯一的)一个鏈映射.

沿用定义 2.1 中的記号. 設 $s^q=a^i\cdots a^k$ 是 K 的任一个有向单形. 如果 $\underline{f}(a^i)=b^{j(i)}$, $\cdots$, $\underline{f}(a^k)=b^{j(k)}$ 都是 L 的不同的頂点, 則因为 $\underline{f}$ 是单純映射, $t^q=b^{j(i)}\cdots b^{j(k)}$ 是 L 的一个有向单形;这时候我們定义

$$f_q(s^q)=t^q;$$

显然可知 $f_q(-s^q)=-t^q$. 如果 s^q 在单純映射 $\underline{f}$ 下**退化**, 即頂点 $b^{j(i)}$, $\cdots$, $b^{j(k)}$ 中至少两个相同,則定义

$$f_q(s^q)=0.$$

然后在 $C_q(K)$ 上作綫性扩張, 即对于鏈 $x_q=\sum g_is_i^q$, $g_i\in J$, 定义

$$f_q(x_q)=\sum g_if_q(s_i^q).$$

显然

$$f_q:\ C_q(K)\to C_q(L)$$

是一个同态. 为簡单起見,用 f 来表示这一序列的同态 $\{f_q\}$*).

*) 这使得記号 f_0 有两个意义: 頂点間的对应与零維鏈群間的同态. 只要注意到 f_0 的定义域,就不会引起混淆.

2.3 命題 設 K 与 L 是复形，而且 $\underline{f}$: $K \to L$ 是单純映射．則 $\underline{f}$ 誘导出一个鏈映射 $f = \{f_q\}$

$$f_q: C_q(K) \to C_q(L),$$

而且零維鏈 x_0 的指数在 f_0 下保持不变：

$$\operatorname{In}(f_0(x_0)) = \operatorname{In}(x_0). \tag{3}$$

我們把鏈映射 $f = \{f_q\}$ 叫作**单純映射 $\underline{f}$ 所誘导出的鏈映射**．我們也把单純映射所誘导出的鏈映射叫作**单純鏈映射**．

証　明　如果 $f_0(a^i) = b^{j(i)}$，則 $\operatorname{In}(f_0(a^i)) = \operatorname{In}(b^{j(i)}) = \operatorname{In}(a^i)$．于是有式(3)．

因为 ∂ 与同态 f 都是綫性的，只需要証明 $x_q = s^q$ 时下式

$$\partial f_q x_q = f_{q-1} \partial x_q \tag{4}$$

成立．不妨普遍性，設 $s^q = a^0 a^1 \cdots a^q$ 而且 $f(a^i) = b^i$，这里的 b^i 不必都不同．如果 b^i 都不同，則

$$\begin{aligned} \partial f_q s^q &= \partial(b^0 b^1 \cdots b^q) = \sum(-1)^i b^0 \cdots \hat{b}^i \cdots b^q \\ &= f_{q-1}\left(\sum(-1)^i a^0 \cdots \hat{a}^i \cdots a^q\right) = f_{q-1} \partial s^q. \end{aligned} \tag{5}$$

如果至少有两个 b^i 相同，則从定义 $f_q s^q = 0$，于是 $\partial f_q s^q = 0$．另一方面，考虑 $f_{q-1} \partial s^q$．如果至少有三个 b^i 相同，則 s^q 的 $q-1$ 維面的 f_{q-1} 象都是零．如果恰有两个 b^i 相同，不損失一般性还可設 $b^0 = b^1$．然后在式(5)中的第一个和中的前两項互相消去，而以后的每一項都有重复的頂点，因而是零；即 $f_{q-1} \partial s^q = 0$．于是式(4)一般地成立．∎

2.4 命題 設 K, L, M 都是复形，$\underline{f}$: $K \to L$ 与 $\underline{g}$: $L \to M$ 都是单純映射．从命題 2.2，$\underline{h} = \underline{g}\underline{f}$: $K \to M$ 也是单純映射．于是对于由它們所决定的单純鏈映射，有

$$h_q = g_q f_q, \tag{6}$$

对于由这两个鏈映射所誘导出的同調群之間的同态，有

$$h_{q*}=g_{q*}f_{q*}. \tag{7}$$

証 明 式(6)的証明．因为諸同态都是綫性的，只需要証 $h_q(s^q)=g_qf_q(s^q)$，对于 K 的任一有向单形 s^q．如果 s^q 在单純映射 h 下不退化，則 s^q 在单純映射 $\underline{f}$ 下不退化，而且 $f_q(s^q)$ 在单純映射 g 下不退化；因而 $h_q(s^q)=g_qf_q(s^q)$．如果 s^q 在单純映射 $\underline{h}$ 下退化，則 $h_q(s^q)=0$；这时候有下列两种可能．(i) s^q 在单純映射 $\underline{f}$ 下退化；于是 $f_q(s^q)=0$, $g_qf_q(s^q)=0$．(ii) $f_q(s^q)$ 在单純映射 $\underline{g}$ 下退化；于是 $g_q(f_q(s^q))=0$．

式(7)的証明用命題1.3．▌

例 2.2 讀者可試作从圓周到环面，及从二維球到环面的单純映射 $\underline{f}$，并求得 f_q 与 f_{q*}．

习　　題

1．設 $\underline{f}$: $\underline{s}^3\to\underline{t}^2$ 是例 2.1 中的单純映射，b 是 $\underline{t}^2$ 的任一点．試說明 $\underline{f}^{-1}(b)$ 是 $\underline{s}^3$ 中什么图形．

2．設图1中的 K 与 L 分别是圓周 S^1 与环面 T^2 的单純剖分，而且 f_0 把 K 的頂点 i 变成 L 的頂点 i, $i=1, 2, \cdots, 6$．試求 f_*: $H_q(K)\to H_q(L)$．

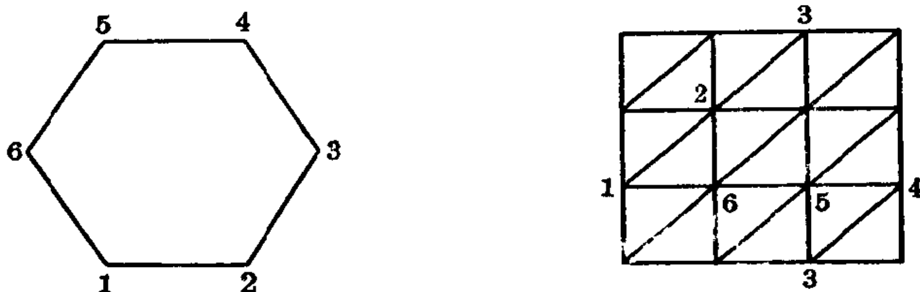


图 1

3．設图2中給出的是 Klein 瓶的剖分 K 与射影平面的剖分 L，以及 K 的頂点到 L 的頂点之間的对应 f_0．試求 f_*: $H_q(K)\to H_q(L)$．

4．設 $\underline{f}$: $K\to L$ 是单純映射，而且 L_0 是 L 的子复形．試証：$\underline{f}^{-1}(L_0)$ 是 K 的子复形．

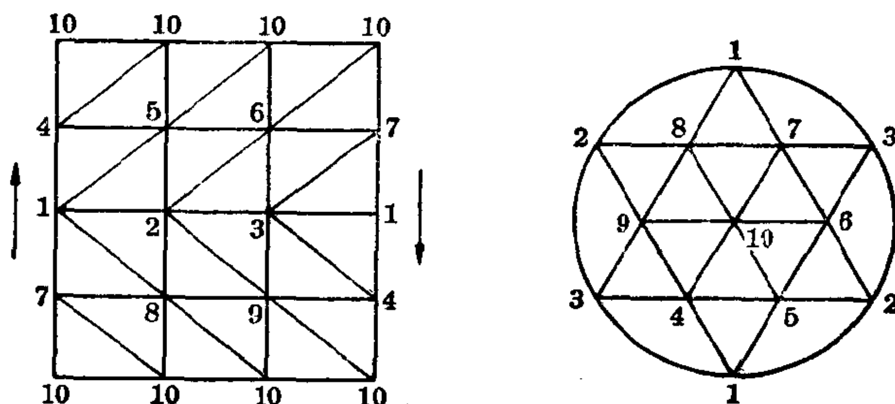


图 2

3. 重心重分

复形 K 是多面体 $|K|$ 的单純剖分(定义 III2.2),或者通俗地說,K 是由剖分多面体 $|K|$ 成某种小块而得到的. 因而 K 的重分 L (§1开始时)是由剖分多面体 $|K|$ 成某种更小的小块而得到的. 本节中所討論的重心重分是一种特别简便的重分;它是使我們的討論能从块状的复形过渡到作为空間的多面体的主要工具之一(参看命題 3.5).

重心重分自然地給出两种鏈映射,重分鏈映射与标准鏈映射.

重心重分的几何作法 我們要从复形 K 作出另一个同維的复形 SdK,叫作 K 的重心重分. 复形 K 当然可以特别是一个单形 $\underline{s}$ 的閉包复形 $\mathrm{Cl}\,\underline{s}$,这时候我們把 $Sd\,\mathrm{Cl}\,\underline{s}$ 簡記作 $Sd\underline{s}$. 重心重分这个名称就告訴我們,SdK 是根据 K 的全体单形的重心作出的,有簡明的几何意义. 为着以后叙述方便,并且为着表明所要作的 SdK 是什么,我們在給出 SdK 的定义之前,先写下下面的两个命題:

3.1 命題 如果 $\underline{s}$ 是欧几里得空間 E^m 中的一个单形,则 $Sd\underline{s}$ 是 E^m 中的一个同維的复形. 它具有下面两个性质: (i) $|Sd\underline{s}| =$

$|\underline{s}|$，卽多面体相同；(ii) 如果 $\underline{s}^r \prec \underline{s}$，則 $Sd\underline{s}^r \subset Sd\underline{s}$，卽 $Sd\underline{s}^r$ 是 $Sd\underline{s}$ 的子复形.

3.2 命題　如果 K 是 E^m 中的一个复形，則 SdK 也是 E^m 中的一个同維的复形. 它具有下面的两个性质：(i) $|SdK|=|K|$，(ii) 如果 $L\subset K$，則 $SdL\subset SdK$.

命題 3.1 当然是命題 3.2 的特款. 在把命題 3.1 中的 $\underline{s}$ 改为 q 維单形 $\underline{s}^q$，或把 3.2 中的 K 改为 K 的 q 維骨架 K^q 后，而得到的命題，分别記作 $(3.1)_q$ 或 $(3.2)_q$.

第一步：定义 $Sd\underline{s}$. 对于 0 維单形 $\underline{s}^0$，定义 $Sd\underline{s}^0=\underline{s}^0$. 命題 $(3.1)_0$ 明显地成立. 对于維数用归納法，設从 0 維到 $q-1(\geqslant 0)$ 維的单形的重心重分都已有了定义，并且命題 $(3.1)_0, \cdots, (3.1)_{q-1}$ 都成立. 現在我們来定义 $Sd\underline{s}^q$. $\underline{s}^q$ 的边緣复形 $\dot{\underline{s}}^q$ 是 $\underline{s}^q$ 的所有 $q-1$ 維面的閉包复形的并集；把 $\underline{s}^q$ 的所有 $q-1$ 維面的重心重分的并集記作 $Sd\dot{\underline{s}}^q$. 还設，当 $q\geqslant 1$，

$(3.3)_q$ 命題　$Sd\dot{\underline{s}}^q$ 是 $q-1$ 維复形.

命題 $(3.3)_1$ 显然成立.

把 $\underline{s}^q$ 的重心記作 $\overset{*}{\underline{s}}{}^q$（图 3，$q=1$ 及 2 的情形）. 然后作以 $\overset{*}{\underline{s}}{}^q$ 为頂点、以 $\underline{s}^q$ 的每一个 $q-1$ 維面的重心重分为底的錐形(見例 III 4.7，都是复形). 把这些錐形的并集定义为 $\underline{s}^q$ 的**重心重分** $Sd\underline{s}^q$. 沿用例 III 4.7 中的記号，有

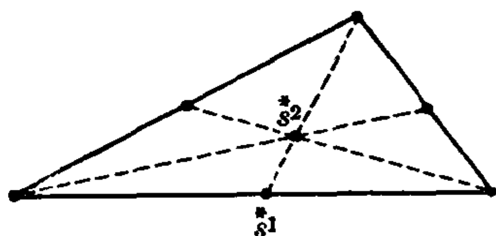


图 3

$$Sd\underline{s}^q=\overset{*}{\underline{s}}{}^q \cup Sd\dot{\underline{s}}^q \cup \overset{*}{\underline{s}}{}^q Sd\dot{\underline{s}}^q. \tag{1}$$

要完成 $Sd\underline{s}$ 的定义与証明命題 (3.1)，現在只要在 $(3.1)_{q-1}$，$(3.3)_q$ 的基础上証明 $(3.1)_q$；更詳細地說，只要証明：$Sd\underline{s}^q$ 具有复形的性质 2° [因为从式 (1) 的表示法，已知 $Sd\underline{s}^q$ 具有复形的性质 1°]，命題 $(3.1)_q$ 中的性质 (i) [因为 $(3.1)_q$ 中的性质 (ii) 是明显

的]. 但这都是单形的凸体性质的明显推論. (复习題.)

第二步: 定义 SdK. 如同定义 $Sd\underline{s}$ 时, 对于 K 的 0 維骨架 K^0, 先定义 $SdK^0=K^0$. 命題 $(3.2)_0$ 明显地成立. 設 K 的从 0 維到 $q-1$ 維的骨架的重心重分都已有了定义, 并且 $(3.2)_0, \cdots, (3.2)_{q-1}$ 都成立. 設 K^q 的 q 維单形是 $\underline{s}_i^q$, $i=1, 2, \cdots, \alpha$. 現在定义 K^q 的**重心重分** SdK^q

$$SdK^q=SdK^{q-1}\cup Sd\underline{s}_1^q\cup Sd\underline{s}_2^q\cup\cdots\cup Sd\underline{s}_\alpha^q. \tag{2}$$

同样地, SdK 定义的完成与命題3.2的証明都归結为:在$(3.2)_{q-1}$的基础上証明$(3.2)_q$. 但这是(3.1)的容易推論. (复习題.)

容易看出,重心重分是§1开始时所說的重分的一种. 此后我們只限于用重心重分;凡提起重分时,所指的永远是重心重分.

下面的定理指出 SdK 的单形的一个簡便的、但十分重要的表示法. 此后都是根据这定理来用 SdK.

3.4 定理 設 K 是一个复形. 如果

$$\underline{s}_0\prec\underline{s}_1\prec\cdots\prec\underline{s}_r \tag{3}$$

是 K 的单形的一个眞序列(这里的**眞序列**是說 $\underline{s}_i$ 是 $\underline{s}_{i+1}$ 的一个眞面),而且 $\overset{*}{s}_i$ 是 $\underline{s}_i$ 的重心,則

$$(\overset{*}{s}_0, \overset{*}{s}_1, \cdots, \overset{*}{s}_r) \tag{4}$$

是重分 SdK 的一个单形. 而且反之, SdK 的每一个单形都可如此得到.

証 明 用归納法. 設对于 K 的 $q-1$ 維骨架 K^{q-1} 定理已成立. 我們来証明对于 K^{q+1} 定理也成立.

先証定理的第一部分. 設 $\underline{s}_r$ 的維数 $<q$. 則单形 (4) 都属于 K^{q-1}. 根据归納假設,单形(4) $\in SdK^{q-1}\subset SdK^q$. 再設 $\underline{s}_r=\underline{s}^q$, 因而重心 $\overset{*}{s}_r=\overset{*}{s}$. 如果 $r=0$, 則据式(1), $\overset{*}{s}\in Sd\underline{s}^q\subset SdK^q$. 如果 $r>0$, 則式(3)中的 $\underline{s}_0, \underline{s}_1, \cdots, \underline{s}_{r-1}\in\dot{\underline{s}}^q$; 根据归納假設可知 $Sd\dot{\underline{s}}^q$ 含有单形 $\underline{t}=(\overset{*}{s}_0, \overset{*}{s}_1, \cdots, \overset{*}{s}_{r-1})$. 所以 $SdK^q\supset Sd\underline{s}^q\ni$ 单形(4).

現在証定理的第二部分. 設 $\underline{t}$ 是 SdK^q 的任一单形. 根据式(2), t 或者 $\in SdK^{q-1}$, 或者 $\bar{\in} SdK^{q-1}$, 因而 $\in$ 一个 $Sd\underline{s}_i^q$. 如果是前者, 則根据归納假設, $\underline{t}$ 已具有形式(4). 如果是后者, 則 $\underline{t}$ 必以 $\dot{\underline{s}}_i$ ($\underline{s}_i^q$ 的重心)为一个頂点. 現在有两种可能:或者 $\underline{t}$ 的維数是零, 則 $\underline{t}$ 已被眞序列 $\underline{s}_i^q$ 决定; 或者 $\underline{t}$ 的維数 $r>0$. 在 $\underline{t}$ 的維数 $r>0$ 时, 根据 $\underline{t}\in Sd\underline{s}_i^q$, $\underline{t}=\dot{\underline{s}}_i\underline{u}$, 这里的单形 $\underline{u}\in Sd\dot{\underline{s}}_i^q$. 根据归納假設, $\underline{u}$ 被 $\dot{\underline{s}}_i^q$ 的一个眞序列 $\underline{s}_0\prec\underline{s}_1\prec\cdots\prec\underline{s}_{r-1}$ 决定, 因而 $\underline{t}$ 被 K^q 的一眞序列 $\underline{s}_0\prec\underline{s}_1\prec\cdots\prec\underline{s}_{r-1}\prec\underline{s}_i^{q+1}$ 决定. ▌

本定理也可以用来作为 SdK 的一个等价的定义. 我們还說 $\dot{\underline{s}}_r$ 是单形(4)的**主导頂点.**

重分 SdK 还可以再作重分. 一般地, 命

$$Sd^{(r)}K=Sd(Sd^{(r-1)}K),$$

这里的 $Sd^{(0)}K=K$; 而且把 $Sd^{(r)}K$ 叫作 K 的**第 r 次重分.**

現在我們要来比較复形 K 的单形与重分 $Sd^{(r)}K$ 的单形的大小.

3.5 命題 欧几里得空間 E^m 中的維数 >1 的单形 $\underline{s}$ 的直徑 $\mathrm{diam}(\underline{s})$ 等于 $\underline{s}$ 的一維面的长度的最大值.

証 明 我們将利用单形的下述性质: 如果一个凸集包含一单形的所有頂点, 則它就包含这整个单形. (复习題.)

設 $\underline{s}=(a^0, a^1, \cdots, a^r)$, 設 d 是 $\underline{s}$ 的一維面的长度的最大值. 于是 $\mathrm{diam}(\underline{s})\geqslant d$.

另一方面, 設点 x, $y\in\underline{s}$. 設 a^i 是离 x 最远的頂点之一. 以 x 为中心, $\rho(x, a^i)$ 为半徑, 作一閉实心球 V. V 是凸集, 且包含 $\underline{s}$ 的全部頂点, 所以包含 $\underline{s}$. 可見 $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, a^i)$. 再以 a^i 为中心, d 为半徑, 作一閉实心球 V'. V' 是凸集, 且包含 $\underline{s}$ 的全体頂点, 所以包含 $\underline{s}$. 可見 $\rho(x, a^i)\leqslant d$. 因此 $\rho(x, y)\leqslant d$. 于是 $\mathrm{diam}(\underline{s})\leqslant d$. ▌

3.6 命题　設 K 是欧几里得空間 E^m 內的一个 n 維的复形，而且它的单形的直徑都不大于 η. 則第 r 次重分 $Sd^{(r)}K$ 的单形的直徑都不大于 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^r\eta$. 因此，当 r 充分地大，$Sd^{(r)}K$ 的单形的直徑就任意地小.

証　明　先考虑 SdK.

設 $\underline{t}$ 是 SdK 的任一一維单形. 根据定理 3.4，$\underline{t}=(\mathring{s}_0, \mathring{s}_1)$，这里 $\mathring{s}_0$ 与 $\mathring{s}_1$ 分别是 K 的单形 $\underline{s}_0$ 与 $\underline{s}_1$ 的重心而且 $\underline{s}_0 \prec \underline{s}_1$. 設

$$\underline{s}_0=(a^0, \cdots, a^p),$$
$$\underline{s}_1=(a^0, \cdots, a^p, a^{p+1}, \cdots, a^q);$$

而且命

$$\underline{s}=(a^{p+1}, \cdots, a^q)$$

$\underline{s}$ 的重心为 $\mathring{s}$. 从重心的概念可知，这三个重心共綫，而且 $\mathring{s}_1$ 在 $\mathring{s}_0$ 与 $\mathring{s}$ 之間. 現在要比較 $\rho(\mathring{s}_0, \mathring{s})$ 和 $\rho(\mathring{s}_0, \mathring{s}_1)$. 在 $\underline{s}_1$ 中取重心坐标；把这三个重心表成 $\underline{s}_1$ 的頂点的綫性組合时，就看出：

$$\mathring{s}_1=\frac{p+1}{q+1}\mathring{s}_0+\frac{q-p}{q+1}\mathring{s}.$$

这說明 $\mathring{s}_1$ 分有向綫段 $\mathring{s}_0\mathring{s}$ 成比 $q-p: p+1$. 于是

$$\rho(\mathring{s}_0, \mathring{s}_1)=\frac{q-p}{q+1}\rho(\mathring{s}_0, \mathring{s})\leqslant\frac{q-p}{q+1}\eta.$$

因为 $q>p\geqslant 0$ 与 $q\leqslant n$，分别有

$$\rho(\mathring{s}_0, \mathring{s}_1)\leqslant\frac{q}{q+1}\eta, \quad 与 \quad \frac{q}{q+1}\eta\leqslant\frac{n}{n+1}\eta.$$

于是 SdK 的任一一維单形 $\underline{t}$ 的长度 $\leqslant\frac{n}{n+1}\eta$.

由此立即推知 $Sd^{(r)}K$ 的单形的直徑都不大于 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^r\eta$. ∎

重分鏈映射　現在討論从复形 K 的鏈群到重分 SdK 的鏈群

的一序列的同态.

对于 K 的任一个 q 維鏈 x_q，我們要来定义 SdK 的一个 q 維鏈，叫作**鏈 x_q 的（重心）重分**，記作 Sd_qx_q. 如果 $q=0$，則定义

$$Sd_0x_0=x_0. \tag{5}$$

假設 $Sd_{q-1}x_{q-1}$ 已有定义；归納地定义 Sd_qx_q. 首先考虑 $x_q=s$，K 的一个 q 維的有向单形. 如果 $\underline{s}$ 是对应的无向单形，而且 $\overset{*}{s}$ 是 $\underline{s}$ 的重心，則式(1)中的 $Sd\underline{s}\subset SdK$. 根据归納假設，边緣鏈 ∂s 的重分 $Sd_{q-1}(\partial s)$ 已有定义，而且是复形 $Sd\dot{\underline{s}}$ 上的一个 $q-1$ 維鏈. 現在定义

$$Sd_qs=\overset{*}{s}Sd_{q-1}(\partial s), \tag{6}$$

这里方程的右边是一个 q 維鏈*)（图 4）. 其次，如果 $x_q=\sum g_is_i$，則用綫性扩張定义

$$Sd_qx_q=\sum g_iSd_qs_i.$$

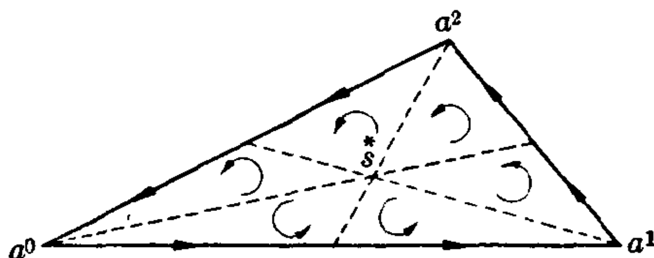


图 4　$s=a^0a^1a^2$

3.7 命题　从复形 K 的鏈 x_q 到 K 的重分 SdK 的鏈 Sd_qx_q 这对应 Sd_q: $x_q\to Sd_qx_q$ 是一个鏈映射 $Sd=\{Sd_q\}$

$$Sd_q:\ C_q(K)\to C_q(SdK),$$

而且零維鏈 x_0 的指数在 Sd_0 下保持不变：

$$\mathrm{In}(Sd_0x_0)=\mathrm{In}\,x_0. \tag{7}$$

这个鏈映射 $Sd=\{Sd_q\}$ 叫作**重分鏈映射**，而且由它决定的 $Sd_*=\{Sd_{q*}\}$

*) 如果 $Sd_{q-1}(\partial s)=gb^i\cdots b^j+\cdots$，則 $Sd_qs=g\overset{*}{s}b^i\cdots b^j+\cdots$.

$$Sd_{q*}\colon\ H_q(K)\to H_q(SdK)$$

叫作**同調群之間的重分同态**.

証　明　对应 Sd_q 显然是同态. 因为式 (5), 故有(7).

現在要証明:

$$\partial Sd_q x_q = Sd_{q-1}\partial x_q, \tag{8}_q$$

卽重分的边緣是边緣的重分. (参看图 4. 設 x_q 是图中的 s.) 式 $(8)_0$ 显然成立. 用归納法証明: 如果 $(8)_q$ 成立, 則 $(8)_{q+1}$ 成立. 因为 Sd 与 ∂ 这两种运算都是綫性的, 只需要証 x_{q+1} 是一个 $q+1$ 維的有向单形 s 时的$(8)_{q+1}$. 从式(6)

$$\partial Sd_{q+1}s=\partial(\overset{*}{s}Sd_q(\partial s))=Sd_q(\partial s)-\overset{*}{s}\partial(Sd_q(\partial s)).$$

鏈 ∂s 的維数是 q, 根据归納假設 $(8)_q$ 可知

$$\partial(Sd_q(\partial s))=Sd_{q-1}(\partial(\partial s))=0.$$

于是 $(8)_{q+1}$ 成立. ▮

标准映射与标准鏈映射　沿用定理 3.4 中的記号; 如果复形 K 的全体无向单形用 $\underline{s}_i$ 表示, 則 K 的重分 SdK 的全体頂点可用 $\overset{*}{s}_i$ 表示. 定义从 SdK 的頂点 $\overset{*}{s}_i$ 到 K 的頂点的一个对应:

$$\pi_0\colon\ \overset{*}{s}_i\to \underline{s}_i \text{ 的任意选定了的一个頂点.} \tag{9}$$

如果 $\underline{t}$ 是 SdK 的一个单形, 則根据定理 3.4,

$$\underline{t}=(\overset{*}{s}_i,\ \cdots,\ \overset{*}{s}_j), \tag{10}$$

这里 $\underline{s}_i\prec\cdots\prec\underline{s}_j$ 是 K 的一眞序列的单形; 因而 $\pi_0(\overset{*}{s}_i),\ \cdots,\ \pi_0(\overset{*}{s}_j)$ 都是 K 的同一个单形 $\underline{s}_j$ 的頂点. 根据 §2 中单純映射的定义, π_0 决定一个单純映射

$$\underline{\pi}.\ SdK\to K \tag{11}$$

与一个单純鏈映射 $\pi=\{\pi_q\}$

$$\pi_q\cdot\ C_q(SdK)\to C_q(K). \tag{12}$$

我們把 $\underline{\pi}$ 叫作一个**标准映射**，$\pi=\{\pi_q\}$ 叫作一个**标准鏈映射**.

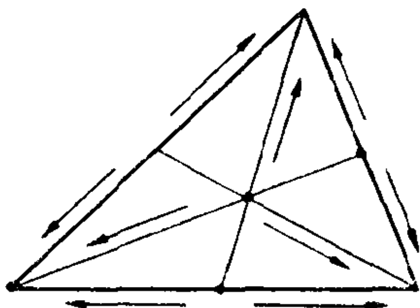


图 5

附　記　如果 K 的維数不是 0，对应 π_0 有种种不同的定义法，因而也有不同的标准映射 $\underline{\pi}$ 与标准鏈映射 $\pi=\{\pi_q\}$. 例如在图 5 中，K 是一个二維单形的閉包复形. 如果 K 中的单形 $\underline{s}$ 是零維的，$\pi_0(\dot{s})=\underline{s}=\dot{s}$ 是确定的. 如果 $\underline{s}$ 的維数 >0，则 $\pi_0(\dot{s})$ 有种种不同的定义法，如同图中从 $\dot{s}$ 画出不只一个箭头所表示的. 但每一个 π_0 都决定一个标准映射 $\underline{\pi}$. 至于不同的 π_0 所决定的不同的 $\pi=\{\pi_q\}$ 之間的关系，見后面的例 4.4.

3.8 命題　标准映射 $\underline{\pi}: SdK\to K$ 与恒同映射 $1: SdK\to K$ 同倫：

$$\underline{\pi}\simeq 1:\ SdK\to K.$$

証　明　設 x 是 $|SdK|=|K|$ 的任一点，点 x 的在 SdK 中的承載单形(定义 III 1.9 后)是 $t=(\dot{s}_i,\ \cdots,\ \dot{s}_j)$，其主导頂点(定理 3.3 的証明后)是 $\dot{s}_j$. 然后 $\underline{t}\subset\underline{s}_j$，而且 $\underline{t}$ 的每一个頂点的 $\underline{\pi}$ 象是 $\underline{s}_j$ 的一个頂点；因而点 x 与象点 $\underline{\pi}(x)$ 都属于 $\underline{s}_j$. 作 $\underline{s}_j$ 中的綫段

$$\varphi_t(x)=(1-t)\underline{\pi}(x)+tx,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

对于任一点 $x\in|K|$，都可以作这样的綫段，因而得到倫移 $\varphi_t:\underline{\pi}\simeq 1$. ▌

附　記　参看定理 5.3. 在那里的意义下，$\underline{\pi}$ 是 1 的"单純逼近".

3.9 引理　每一个标准鏈映射 $\pi: C_q(SdK)\to C_q(K)$ 是重分鏈映射 $Sd: C_q(K)\to C_q(SdK)$ 的一个左逆：

$$\pi_q Sd_q=1:\ C_q(K)\to C_q(K).$$

这里的 1 是恒同鏈映射.

証　明　我們只要証明，对于 K 的每一个有向单形 s^q，

$$\pi_q Sd_q s^q = s^q. \tag{$(12)_q$}$$

式 $(12)_0$ 显然成立. 用归納法証：如果式 $(12)_{q-1}$ 成立，則式 $(12)_q$ 成立，$q\geqslant 1$. 設 t 是鏈 $Sd_q s^q$ 中出現的任一 q 維的单形；因而根据式 (6)，无向单形 $\underline{t}$ 以 s^q 的重心 $\overset{*}{s}$ 为一个頂点，而且以 $\overset{*}{s}$ 为主导頂点. 根据 $\underline{t}$ 的主导頂点以及 π_0 的定义，t 的頂点的 π_0 象都是 s^q 的頂点；因而 $\pi_q t$ 是 $\pm s^q$ 或 0. 于是

$$\pi_q Sd_q s^q = k s^q, \quad k \text{ 整数}.$$

应用 ∂ 到这方程的两边，而且根据鏈映射与 ∂ 的可交換性以及归納假設，就有

$$\partial \pi_q Sd_q s^q = \pi_{q-1} Sd_{q-1} \partial s^q = \partial s^q = k \partial s^q.$$

既然 $q\geqslant 1$，$\partial s^q \neq 0$；因而 $k=1$，即 $(12)_q$ 成立. ▌

习　題

1. 設单形 $\underline{s}^q=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$，而且 $\overset{*}{s}{}^i$ 是 $\underline{s}^q$ 的面 $\underline{s}^i=(a^0, a^1, \cdots, a^i)$ 的重心. 設点 $x\in \underline{t}^q=(\overset{*}{s}{}^0, \overset{*}{s}{}^1, \cdots, \overset{*}{s}{}^q)$，而且它的在 $\underline{s}^q$ 中的重心坐标是 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$，在 $\underline{t}^q$ 中的重心坐标是 $(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_q)$. 試求矩陣 A 使得

$$\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_q\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\mu_0\\ \mu_1\\ \vdots\\ \mu_q\end{pmatrix}.$$

2. 設 $|K|$ 的点 x 在 SdK 中的承載单形是 $\underline{t}^q=(\overset{*}{s}_0, \overset{*}{s}_1, \cdots, \overset{*}{s}_q)$，这里 $\underline{s}_0\prec\underline{s}_1\prec\cdots\prec\underline{s}_q$ 是 K 的一个眞序列. 試証：如果 K 的頂点 $a\in\underline{t}^q$，則 x 在 K 中的諸重心坐标之中，相应于頂点 a 的重心坐标不小于相应于别的每一頂点的重心坐标.

3. 設 $\underline{s}^q$ 是一个固定的 q 維单形，$\underline{s}^i$ 是 $\underline{s}^q$ 的某一 i 維面，而且 $\overset{*}{s}{}^i$ 是 $\underline{s}^i$ 的重心. 試証：

$$Sd_q s^q = \sum [s^q : s^{q-1}][s^{q-1} : s^{q-2}]\cdots[s^1 : s^0]\,\overset{*}{s}{}^q\overset{*}{s}{}^{q-1}\cdots\overset{*}{s}{}^0,$$

这里的和号 $\sum$ 是对于所有可能的眞序列

$$\underline{s}^0 \prec \underline{s}^1 \prec \cdots \prec \underline{s}^q$$

展开的,而且 $+\overset{*}{s}^0=s^0$.

4. 試利用习题 3 中的公式,直接証

$$\pi_q Sd_q = 1.$$

5. 設 $\underline{f}: K \to L$ 是一个单純映射. 对于 K 的每一单形 s, 命

$$f'_0: \overset{*}{s} \to (\underline{f}^*(\underline{s}));$$

它是从 SdK 的頂点到 SdL 的頂点的一个单值对应. 試証: f'_0 决定一个单純映射 $\underline{f}': SdK \to SdL$.

4. 同調群的重分不变性

本节的目的是完成同調群重分不变性(定理 4.3)的証明. 这証明的最后一个准备工作是"零調承載子"定理(定理 4.1)的推論(引理 4.2).

首先引进几个概念. 如果一个复形 K 是連通的(因而 $H_0(K) \approx J$), 而且它的同調群 $H_q(K)=0, q>0$, 它叫**零調的**复形. 例如一个点所成的复形就是零調的.

鏈映射与鏈同倫的重要性已見 §1 中. 在同調群重分不变性的証明中, 重要的鏈映射只有两种, 即重分鏈映射与标准鏈映射; 而它們的一个共同的特点是它們都具有保持零維鏈的指数不变(見命題 2.3 与命題 3.7). 因此我們从它們提炼出下述概念. 設 K 与 L 是复形. 如果鏈映射 $f=\{f_q\}: K \to L$ 保持零維鏈的指数不变, 則 f 叫作**正常的**鏈映射.

如果有一个函数 C, 对于 K 的每一个单形 $\underline{s}$, 函数值 $C(\underline{s})$ 是 L 的一个非空子复形, 而且具有下述性质: $\underline{s}' \prec \underline{s}$ 蘊涵 $C(\underline{s}') \subset C(\underline{s})$, 則 C 叫作从 K 到 L 的一个**承載子**. 如果正常的鏈映射 $f=\{f_q\}$:

$$f_q: C_q(K) \to C_q(L)$$

具有性质：$f_q(s)\subset C(\underline{s})$（即 $f_q(s)$ 是 $C(\underline{s})$ 上的一个鏈），这里 s 表示 $\underline{s}$ 的任一个有向单形，则 C 叫作 f 的一个承載子. 同样地，如果鏈倫移 $D: f\simeq g$ 具有性质：$D_q(s)\subset C(\underline{s})$，则 C 叫作鏈倫移 D 的一个承載子. 如果对于每一个 $\underline{s}\in K$，$C(\underline{s})$ 都是零調的，则 C 叫作**零調的承載子**.

例 4.1 設 K 与 L 是复形，而且 $\underline{f}: K\to L$ 是单純映射，由从 K 的頂点到 L 的頂点的一个对应 f_0 决定的. 根据定义 2.1，K 的任一无向单形 $\underline{s}$ 的 $\underline{f}$ 象 $\underline{f}(\underline{s})$ 是 L 的一个无向单形 $\underline{t}$（$\underline{t}$ 的維数可小于 $\underline{s}$ 的維数）. 容易看出，如此通过 f 所定义的 $C(\underline{s})=\mathrm{Cl}\,\underline{t}$ 是从 K 到 L 的一个零調承載子，而且是单純鏈映射 $f=\{f_q\}$

$$f_q: C_q(K)\to C_q(L)$$

的承載子.

例 4.2 設 $\underline{f}, \underline{g}: K\to L$ 是两个单純映射. 如果对于 K 的任一单形 $\underline{s}$，$\underline{f}(\underline{s})$ 与 $\underline{g}(\underline{s})$ 都是 L 的同一个单形的面，则 $\underline{f}$ 与 $\underline{g}$ 叫作**連接的**单純映射. 这时若以 $\underline{t}$ 表示 L 中以 $\underline{f}(\underline{s})$ 与 $\underline{g}(\underline{s})$ 为面的单形中最低維的一个，则如此通过 f 与 g 所定义的 $C(\underline{s})=\mathrm{Cl}\,\underline{t}$ 是从 K 到 L 的一个零調的承載子，而且是单純鏈映射 $f=\{f_q\}$ 与 $g=\{g_q\}$ 的公共的零調承載子.

例 4.3 重分鏈映射 $Sd=\{Sd_q\}$

$$Sd_q: C_q(K)\to C_q(SdK)$$

是正常的鏈映射. Sd_q 把 K 的任一 q 維有向单形 s 映成［参看上节式(6)与式(1)］

$$Sd_q s=\overset{*}{s}Sd_{q-1}(\partial s)\subset Sd\underline{s}.$$

容易看出，如此通过重心重分 Sd 所定义的 $C(\underline{s})=Sd\underline{s}$ 是从 K 到 SdK 的一个承載子，从例 III 4.7 它是零調的，而且是重分鏈映射 $Sd=\{Sd_q\}$ 的承載子.

例 4.4 設 π_0 是上节式(9)中的对应，而且它决定了标准映射 $\underline{\pi}: SdK\to K$ 与标准鏈映射 $\pi=\{\pi_q\}$

$$\pi_q: C_q(SdK)\to C_q(K).$$

如果 $\underline{t}=(\overset{*}{s}_0, \overset{*}{s}_1, \cdots, \overset{*}{s}_r)$ 是 SdK 的任一无向单形，以 $\overset{*}{s}_r$ 为主导頂点，则 $\underline{\pi}(\underline{t})$ 是 $\underline{s}_r$ 的一个面. 如此通过 π_0 所定义的 $C(\underline{t})=\mathrm{Cl}\,\underline{s}_r$ 是从 SdK 到 K 的一个零調承載子，而且是标准鏈映射 $\pi=\{\pi_q\}$ 的承載子.

設 π_0' 是滿足上节式(9)的另一个对应，而且决定了相应的标准映射 π' 与标准鏈映射 $\pi'=\{\pi_q'\}$. $\mathrm{C}(\underline{t})=\mathrm{Cl}\,\underline{s}_r$ 是 $\pi=\{\pi_q\}$ 与 $\pi'=\{\pi_q'\}$ 的公共的零調承載子.

現在我們証明下面的定理及其推論，以完成重分不变性的証明的准备工作.

4.1 定理(零調承載子定理)　設 K 与 L 是复形. 設 $f=\{f_q\}$ 与 $g=\{g_q\}$

$$f,\ g:\ C_q(K)\rightarrow C_q(L)$$

都是正常的鏈映射，而且具有公共的零調承載子 C. 則存在具有这承載子 C 的一个鏈倫移

$$D:\ f\simeq g;$$

即存在具有这承載子 C 的一序列的同态 $D=\{D_q\}$,

$$D_q:\ C_q(K)\rightarrow C_{q+1}(L),$$

使得

$$\partial_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q=g_q-f_q.$$

証　明　因为 f 与 g 是正常的鏈映射，对于 K 的每一頂点 a 有

$$g_0a-f_0a\in Z_0(\mathrm{C}(a)),$$

而且有

$$\mathrm{In}(g_0a-f_0a)=0.$$

既然 K 連通，从命題 III 3.3，存在一維鏈 $x_1\in C_1(\mathrm{C}(a))$，使得 $\partial x_1=g_0a-f_0a$. 定义

$$D_0a=x_1,$$

而且通过綫性扩張得到同态

$$D_0:C_0(K)\rightarrow C_1(L);$$

这里显然有

$$D_0 a \subset \mathrm{C}(a), \tag{1}_0$$

$$\partial_1 D_0 = g_0 - f_0. \tag{2}_0$$

現在用归納法：假設已作出具有这承載子 C 的一个鏈偷移

$$\{D_0, D_1, \cdots, D_{q-1}\}: f \simeq g, \ q > 0.$$

特別地，有

$$D_{q-1}(s^{q-1}) \subset \mathrm{C}(\underline{s}^{q-1}), \tag{1}_{q-1}$$

$$\partial_q D_{q-1} + D_{q-2}\partial_{q-1} = g_{q-1} - f_{q-1}. \tag{2}_{q-1}$$

我們現在要作出 D_q. 对于 K 的任一 q 維有向单形 $s = s^q$, 命

$$z_q = g_q s - f_q s - D_{q-1}\partial s. \tag{3}$$

从式 $(1)_{q-1}$, $z_q \subset \mathrm{C}(\underline{s})$. 从式 $(2)_{q-1}$,

$$\begin{aligned}\partial_q z_q &= \partial_q g_q s - \partial_q f_q s - \partial_q D_{q-1}\partial s \\ &= g_{q-1}\partial_q s - f_{q-1}\partial_q s - (g_{q-1}\partial_q s - f_{q-1}\partial_q s - D_{q-1}\partial_{q-1}\partial_q s) = 0,\end{aligned}$$

于是 $z_q \in Z_q(\mathrm{C}(\underline{s}))$. 既然 $H_q(\mathrm{C}(\underline{s})) = 0$, 存在

$$x_{q+1} \in C_{q+1}(\mathrm{C}(\underline{s})),$$

使得

$$z_q = \partial x_{q+1}. \tag{4}$$

現在定义

$$D_q s = x_{q+1} \subset \mathrm{C}(\underline{s}), \tag{5}$$

而且通过綫性扩張得到同态

$$D_q: C_q(K) \to C_{q+1}(L).$$

从方程(3)到(5)很容易得到 $(1)_q$, $(2)_q$. 这就得到了

$$\{D_0, D_1, \cdots, D_q\}: f \simeq g,$$

完成了归納法的証明. ▌

例 4.5 根据上面的定理以及命題 1.5, 我們得到下列結論. 如果 $f, g: K \to L$ 是两个連接的单純映射(例 4.2), 則

$$f_{q*} = g_{q*}: H_q(K) \to H_q(L).$$

如果 $\pi, \pi': SdK \to K$ 是任意两个标准映射(例 4.4),则它們是連接的单純映射,因而

$$\pi_{q*} = \pi'_{q*}: H_q(SdK) \to H_q(K).$$

这就是說,虽然重分給出不同的标准映射 π 与 π',但所有这些标准映射都决定同調群之間的同一个同态 $\pi_* = \pi'_*$. 因而我們把 π_* 叫作由重分所决定的、同調群之間的**标准同态**.

最后,我們来証明重分不变性的証明中所需要的、与引理 3.9 占同等地位的下面的引理:

4.2 引理 鏈映射 $Sd\pi: C_q(SdK) \to C_q(SdK)$ 与恒同鏈映射 $1: C_q(SdK) \to C_q(SdK)$ 是具有公共的零調承載子的正常的鏈映射;因而根据定理 4.1 存在一个鏈倫移

$$D:\ Sd\pi \simeq 1. \tag{6}$$

証 明 这里的証明与例 4.4 中的說明相仿. 首先, $Sd\pi = \{Sd_q \pi_q\}$ 与 $1 = \{1_q\}$ 显然是正常的鏈映射. 其次,設 $\underline{t} = (\mathring{s}_0, \cdots, \mathring{s}_q)$ 是 SdK 的任一单形,以 $\mathring{s}_q$ 为主导頂点,则 $\pi(\underline{t})$ 是 K 的单形 $\underline{s}_q$ 的一个面,而且 $Sd\pi(\underline{t}) \subset Sd\underline{s}_q$. 命 $C(\underline{t}) = Sd\underline{s}_q$. 容易看出,如此定义的 $C(\underline{t})$ 是从 SdK 到 SdK 的一个承載子;零調的,根据例 III 4.7;而且显然是 $Sd\pi = \{Sd_q \pi_q\}$ 的承載子. 最后,讀者試举例說明 $Sd_q \pi_q \underline{t}^q = \underline{t}^q$ 不必成立. $C(\underline{t})$ 也显然是 $1 = \{1_q\}$ 的承載子. ∎

4.3 定理(重分不变性) 复形 K 的各維同調群与 K 的重分 SdK 的同維同調群同构.

更明确地說,重分鏈映射 $Sd = \{Sd_q\}$ 与标准鏈映射 $\pi = \{\pi_q\}$ 誘导出互逆的同构:

$$Sd_*:\ H_q(K) \approx H_q(SdK), \quad \pi_*:\ H_q(SdK) \approx H_q(K).$$

証 明 根据引理 3.9 以及命題 1.3, 有

$$\pi_{q*} Sd_{q*} = 1:\ H_q(K) \to H_q(K).$$

根据引理 4.2 中的式(6)、命題 1.3 与命題 1.5, 有

$$Sd_{q*}\pi_{q*}=1:\ H_q(SdK)\to H_q(SdK).$$

然后用命題 B1.8. ▌

习　　題

1. 設$\hat{K}$是以点a为頂点、以复形K为底的錐形（例 III4.7）. 設映射$\underline{g}$: $\hat{K}\to\hat{K}$把$|\hat{K}|$的每一点映成点a，因而是单純映射，誘导出一个单純鏈映射$g=\{g_q\}$, g_q: $C_q(\hat{K})\to C_q(\hat{K})$. 試具体地求出一个鏈倫移$D$来証明

$$g\simeq 1:\ C_q(\hat{K})\to C_q(\hat{K}),$$

这里的1是恒同鏈映射.

然后試利用已得到的結果来求$H_q(\hat{K})$.

2. 設复形K的頂点是a, a^i, $i=1, 2, \cdots, r$. 設$\underline{f}$, $\underline{g}$: $K\to L$是两个特殊的連接的单純映射，使得

$$\underline{f}(a)\neq\underline{g}(a),\quad \underline{f}(a^i)=\underline{g}(a^i),\quad i=1, 2, \cdots, r.$$

試具体地求出一个鏈倫移D来証明它們所誘导出的鏈映射鏈同倫：

$$f\simeq g:\ C_q(K)\to C_q(L).$$

3. 設$\underline{f}$, $\underline{g}$: $K\to L$是任意两个連接的单純映射. 試利用前題，但不能跟例 4.5 中那样利用定理 4.1，作出鏈倫移D来証明鏈映射的鏈同倫：$f\simeq g$.

5. 单純逼近·同調群的拓扑不变性

在§3开始时我們說过，重心重分是使我們的討論能从复形过渡到多面体的主要工具之一. 而另一个工具就是本节中将要介紹的单純逼近；更严格地說，单純逼近是使我們的討論能从多面体过渡到复形的一个工具.

紧跟着单純逼近的討論，我們将給出同調群的拓扑不变性的一个經典的証明.

关于承載单形　在命題 III1.3 后，我們引进了复形K的开

单形这一概念，而且也把 K 的单形叫作閉单形；开单形是单形的内部，单形是开单形的閉包．承載单形（定义 III 1.9 后）原来是用单形来定义的，現在改用开单形来說明如下．因为 K 的开单形两两不相交，而且 $|K|$ 是 K 的全体开单形的并集，$|K|$ 的任一点 x 属于 K 的唯一的一个开单形；这个开单形的閉包，K 的一个单形，就是 x 在 K 中的承載单形 $\mathrm{Car}_K x$．在不会引起混淆时，这承載单形也記作 $\mathrm{Car}\, x$．

5.1 命題　設 K 是复形，$\underline{s}$ 是 K 的一个单形，而且 x 是 $|K|$ 的一个点．則

$$x \in \underline{s} \Leftrightarrow \mathrm{Car}_K x \prec \underline{s}.$$

証　明　$x \in \underline{s} \Leftrightarrow x$ 是 $\underline{s}$ 的一个面的內点 $\Leftrightarrow \mathrm{Car}_K x \prec \underline{s}$．∎

下面的命題是利用承載单形来刻划单純映射的．

5.2 命題　設 $\varphi: K \to L$ 是一个映射．（注意：这是說 $\varphi: |K| \to |L|$ 是一个映射；見定义 III 1.9 后的約定．）它是一个单純映射 $\underline{f}: K \to L \Leftrightarrow \varphi(\mathrm{Car}_K x) = \mathrm{Car}_L\, \varphi(x)$，对于任一点 $x \in |K|$．

証　明　充分性留給讀者作为习題，我們只証明必要性．現在的假設是：$\varphi: K \to L$ 就是 $\underline{f}: K \to L$．

設 x 是 K 的单形 $\underline{s} = (a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 的內点；即

$$x = \lambda_0 a^0 + \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_q a^q,\ \ \lambda_i > 0,\ \ \sum \lambda_i = 1.$$

設 $\underline{f}(\underline{s}) = (b^0, b^1, \cdots, b^r)$．根据单純映射的定义（§2），$\underline{f}(x)$ 在 $(b^0, b^1, \cdots, b^r)$ 上的重心坐标也都是正的，所以 $\underline{f}(x)$ 也是 $\underline{f}(\underline{s})$ 的內点．这就說明

$$\underline{f}(\mathrm{Car}_K x) = \mathrm{Car}_K\, \underline{f}(x).\ ∎$$

5.3 定义　設 K 与 L 是两个单純复形．設 $\varphi: K \to L$ 是一个映射（命題 5.2 中的注意），而 $\underline{f}: K \to L$ 是一个单純映射．如果对于 $|K|$ 的每一点 x，$\underline{f}(x)$ 总落在 $\varphi(x)$ 的在 L 上的承載单形中，即

$$\underline{f}(x) \in \mathrm{Car}\, \varphi(x), \tag{1}$$

我們就說 $\underline{f}: K\to L$ 是 φ 的一个**单純逼近**.

单純逼近这名称是表明 $\underline{f}(x)$, $\varphi(x)$ 总落在 L 的同一个单形 $\operatorname{Car}\varphi(x)$ 中. L 的单形的直徑的最大值表明逼近的程度.

根据命題 5.1, 单純逼近定义 5.3 中的条件(1)可以改写成

$$\operatorname{Car}\underline{f}(x)\prec\operatorname{Car}\varphi(x); \tag{1'}$$

根据命題 5.2, 式(1′)又可以改写成

$$\underline{f}(\operatorname{Car}x)\prec\operatorname{Car}\varphi(x). \tag{1''}$$

为着进一步刻划单純逼近, 需要引进开星形的概念. 設 a 是复形 K 的頂点. K 中以 a 为頂点的全体开单形的幷集, 叫作頂点 a 在 K 上的**开星形**, 記作 $\operatorname{st}_K a$ 或 $\operatorname{st} a$. (注意: 此处开星形的記号 st 中用的是小写的 s, 而定义 III 1.9 后閉星形的記号 St 中用的是大写的 S.) 从这定义, 立刻知道, $|K|$ 中的点

$$x\in\operatorname{st}a\Leftrightarrow a\prec\operatorname{Car}x. \tag{2}$$

还不难看出, $|K|-\operatorname{st}a$ 是 K 中的、不以頂点 a 为頂点的单形的幷集, 所以开星形是 $|K|$ 的开子集.

5.4 命題 設 $\varphi: K\to L$ 是一个映射, 而 $\underline{f}: K\to L$ 是它的一个单純逼近. 則对于 K 的每个頂点 a,

$$\varphi(\operatorname{st}a)\subset\operatorname{st}\underline{f}(a).$$

証　明 設 $x\in\operatorname{st}a$; 因而从式 (2), 即 $a\prec\operatorname{Car}x$. 根据假設,

$$\underline{f}(a)\prec\underline{f}(\operatorname{Car}x)=\operatorname{Car}\underline{f}(x)\prec\operatorname{Car}\varphi(x);$$

于是再从式(2)有 $\varphi(x)\in\operatorname{st}\underline{f}(a)$. ▌

5.5 定义 設 K 与 L 是两个单純复形, 而且 $\varphi: K\to L$ 是一个映射. 如果对于 K 的每一个頂点 a, 存在 L 的至少一个頂点 b, 使得

$$\varphi(\operatorname{st}a)\subset\operatorname{st}b, \tag{3}$$

我們就說 $\varphi: K\to L$ 具有**星形性质**.

命題 5.4 是說，那里的 $\varphi: K\to L$ 具有星形性质．从这个事实的启发，我們得到下面的定理，它也可以說是命題 5.4 的一个逆命題．

5.6 定理（单純逼近定理）　設 K 与 L 是两个复形，而且設 $\varphi: K\to L$ 是一个具有星形性质的映射．如果 $f_0: a\to b$ 是根据星形性质式 (3) 所决定的、从 K 的頂点到 L 的頂点之間的一个单值对应，則 f_0 决定一个单純映射 $\underline{f}: K\to L$，而且 $\underline{f}: K\to L$ 是 φ 的一个单純逼近．

証　明　設 $\underline{s}=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 是 K 的任一单形，而且 x 是 $\underline{s}$ 的一个內点．从式 (2)，$x\in \mathrm{st}\, a^i$，因而 $\varphi(x)\in\varphi(\mathrm{st}\, a^i)$．根据假設的星形性质，$\varphi(x)\in \mathrm{st}\, f_0(a^i)$；因而从式(2)，$f_0(a^i)\prec \mathrm{Car}\,\varphi(x)$．这說明 f_0 把 K 的任一单形的頂点映到 L 的一个单形 $\mathrm{Car}\,\varphi(x)$ 的頂点，所以 f_0 决定一个单純映射 $\underline{f}: K\to L$．再者，因为 $\underline{f}: K\to L$ 是单純映射，有 $\underline{f}(x)\in \underline{f}(\underline{s})\prec \mathrm{Car}\,\varphi(x)$；所以根据定义，$\underline{f}: K\to L$ 是 φ 的一个单純逼近．∎

附　記　我們已經說过（定义 5.5 后），命題 5.4 中的映射 $\varphi: K\to L$ 具有星形性质．从本定理的証明中的 f_0 的作法可知，如果映射 $\varphi: K\to L$ 有一单純逼近 $\underline{f}: K\to L$（例如命題 4.4 所假設的），則这单純逼近也是根据 $\varphi: K\to L$ 的星形性质式(3)、通过 f_0（即限制在 K 的頂点集上的 $\underline{f}$）得到的．

例 5.1　設 K 是 L 的重分 SdL，而且 φ 是恒同映射 1．恒同映射 $1: SdL\to L$ 具有星形性质．（复习題．）再者，任一标准映射 $\underline{\pi}: SdL\to L$ 都是恒同映射 1 的一个单純逼近，而且反之．（复习題．）

这个例子以及后面的命題 5.9 都表明映射 $\varphi: K\to L$ 的单純逼近 $\underline{f}: K\to L$ 是这个恒同映射 1 的单純逼近 $\underline{\pi}$ 的推广．

例 5.2　根据命題 5.6 中单純逼近的作法，具有星形性质的映射 $\varphi: K\to L$ 的单純逼近 $\underline{f}: K\to L$ 不是唯一的，因为 f_0 不是唯一的．但容易看出，如果 φ 是一个单純映射，則 φ 具有星形性质，而且 $\underline{f}=\varphi$．

例 5.3 图 6 中的連續曲綫表示 $\varphi(K)$，其中 $p^i=\varphi(a^i)$. 定义 $f_0(a^1)=f_0(a^2)=f_0(a^3)=b^1$, $f_0(a^4)=f_0(a^5)=f_0(a^6)=b^2$. 然后 $\underline{f}(K)=(b^1, b^2)$.

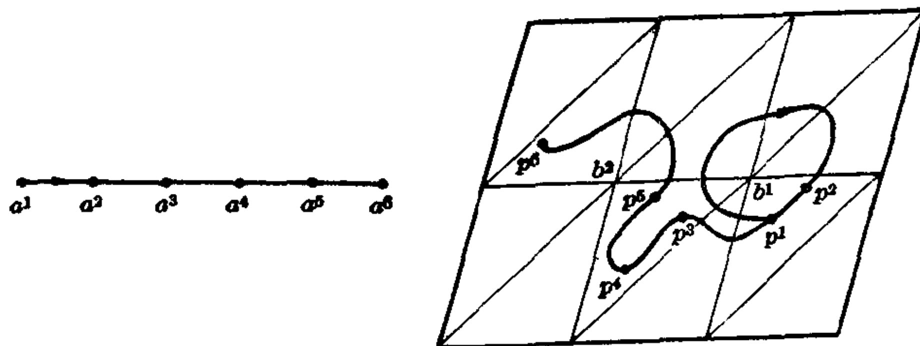


图 6

还可以定义 $f_0'(a^1)=f_0'(a^2)=f_0'(a^3)=b^1$, $f_0'(a^4)=b^3$, $f_0'(a^5)=f_0'(a^6)=b^2$. 然后 $f'(K)=(b^1, b^3)\cup(b^3, b^2)$.

这表明单純逼近是把曲綫 $\varphi(K)$ 拉直成綫段 $\underline{f}(K)$ 或折綫 $\underline{f}'(K)$.

从这个例子，讀者可以看出，$\underline{f}(x)$ 不必属于 $\mathrm{Car}\,\varphi(x)$ 的内部. 如果 K 只是一个一維单形 (a^1, a^6) 的閉包复形 (图 6)，则还可以看出，这时候 $\varphi: K\to L$ 不具有星形性质.

定理 5.6 中的映射 $\varphi: K\to L$ 具有星形性质这个假設是可以避免的. 我們現在要証明下面的命題 5.7，然后从定理 5.6 得到后面的单純逼近的存在定理 5.8.

5.7 命題 設 $\varphi: K\to L$ 是一个映射. 則存在一个整数 $m\geqslant 0$，使得 $\varphi: Sd^{(m)}K\to L$ 具有星形性质.

証 明 L 的全体开星形 $\mathrm{st}\,b^j$ 形成 $|L|$ 的一个开复盖. 因为 φ 連續，$\varphi^{-1}(\mathrm{st}\,b^j)$ 就形成 $|K|$ 的一个开复盖. 多面体 $|K|$ 是一个列紧度量空間. 根据定理 I5.2，存在一个 Lebesgue 数 λ，使得 $|K|$ 中的直徑小于 λ 的任一子集完全属于一个 $\varphi^{-1}(\mathrm{st}\,b^j)$.

設 η 是 K 的单形的直徑的最大值，而且 n 是 K 的維数. 取 $m\geqslant 0$ 使得 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m\eta<\frac{\lambda}{2}$. 根据命題 3.6，$Sd^{(m)}K$ 的开星形 $\mathrm{st}\,a^i$ 的直徑都 $<\lambda$. 从 λ 的取法可知 $\mathrm{st}\,a^i$ 必完全属于某个 $\varphi^{-1}(\mathrm{st}\,b^j)$，

因此 $\varphi(\mathrm{st}\,a^i)$ 必完全属于某个 $\mathrm{st}\,b^j$. 故 $\varphi: Sd^{(m)}K \to L$ 具有星形性质. ▌

从本命題与定理 5.6 立刻得到下面的推論:

5.8 定理(单純逼近的存在)　設 K 与 L 是两个复形, 而且 $\varphi: K\to L$ 是一个映射. 則存在一个整数 $m\geqslant 0$, 使得映射 $\varphi: Sd^{(m)}K\to L$ 具有星形性质, 因而使得映射 $\varphi: Sd^{(m)}K\to L$ 有单純逼近 $\underline{f}: Sd^{(m)}K\to L$. ▌

例 5.4　設 K 是单位綫段, L 是单位正方形的一个三角剖分, 但 $\varphi: K\to L$ 是装滿 $|L|$ 的 Peano 曲綫. 根据定理 5.8, 这曲綫仍可"拉直"成"折綫".

我們現在列举单純逼近的一些有用的性质.

5.9 命題　(i) 如果单純映射 $\underline{f}: K\to L$ 是映射 $\varphi: K\to L$ 的单純逼近, 則 $\underline{f}\simeq\varphi: K\to L$.

(ii) 如果单純映射 $\underline{f}: K\to L$ 及 $\underline{g}: L\to M$ 分别是映射 $\varphi: K\to L$ 及 $\psi: L\to M$ 的单純逼近, 則 $\underline{g}\underline{f}: K\to M$ 是 $\psi\varphi: K\to M$ 的单純逼近.

(iii) 如果 $\underline{f}, \underline{f}': K\to L$ 都是映射 $\varphi: K\to L$ 的单純逼近, 則 $\underline{f}$ 与 $\underline{f}'$ 是連接的(見例 4.2).

証　明　(i) 設点 $x\in|K|$. 由于 $\underline{f}(x)$, $\varphi(x)$ 都属于单形 $\mathrm{Car}\,\varphi(x)$, 所以这两点可用 $\mathrm{Car}\,\varphi(x)$ 中的一条綫段

$$\varphi_t(x)=(1-t)\,\underline{f}(x)+t\varphi(x),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

連結起来. $\varphi_t: \underline{f}\simeq\varphi$ 是一个倫移.

(ii) 設点 $x\in|K|$. 則

$$\underline{g}\,\underline{f}(x)\in\underline{g}\mathrm{Car}\,\varphi(x)=\mathrm{Car}\,\underline{g}\varphi(x)\prec\mathrm{Car}\,\psi\varphi(x).$$

(iii) 設 $\underline{s}$ 是 K 的单形, 点 x 是 $\underline{s}$ 的內点. 則

$$\underline{f}(\underline{s})=\underline{f}\mathrm{Car}\,x=\mathrm{Car}\,\underline{f}(x)\prec\mathrm{Car}\,\varphi(x),$$

同理 $\underline{f}'(\underline{s})\prec\mathrm{Car}\,\varphi(x)$. 所以 $\underline{f}(\underline{s})$ 与 $\underline{f}'(\underline{s})$ 是同一单形的面. ▌

根据本命題的(iii)与例 4.5 以及命題 5.4, 如果映射 $\varphi: K\to L$ 有单純逼近, 則 $\varphi: K\to L$ 具有星形性质, 而且它的任意两个单純逼近 $\underline{f}$, $\underline{f}'$誘导出同一个同态

$$f_*=f'_*: H_q(K)\to H_q(L).$$

我們把这个同态叫作 $\varphi: K\to L$ 所决定的**星形同态**. 設 $\varphi: K\to L$ 不具有星形性质, 但 $\varphi: Sd^{(m)}K\to L$, $m>0$, 具有星形性质 (命題 5.7). 虽然作为映射, $\varphi: K\to L$ 与 $\varphi: Sd^{(m)}K\to L$ 是相同的, 但后者, 而非前者, 决定一个星形同态.

在本章前此討論的基础上, 我們已可以給出同調群拓扑不变性的定理 5.10 的一个經典的証明. 虽然这定理是下一节中更广的倫型不变性定理的明显推論, 但为着使它的証明稍短一些, 同时为着反映証明的一些历史发展, 在这里我們不紧接着进行下一节的討論, 而插入这个經典的証明.

5.10 定理(同調群的拓扑不变性) 同胚的两个复形 K 与 L 的各維同調群分别同构.

証 明 第一步我們来証明: 如果

$$\varphi: K\to L$$

是同胚而且具有星形性质, 則由它所决定的同調群之間的星形同态(見命題 5.9 的証明后)

$$f_*: H_q(K)\to H_q(L)$$

是同构, 这里 $\underline{f}: K\to L$ 是 φ 的任一个单純逼近.

我們先指出, 如果特别地 φ 是恒同映射, 而且 $K=Sd\,L$, 則 $\varphi=1: Sd\,L\to L$ 具有星形性质, 而标准映射 $\underline{\pi}$ 是 φ 的一个单純逼近(例 5.1), 因而这里的星形同态就是标准同态 π_*; 而 π_* 是同构已是重分不变性定理 4.3 的結論. 推而广之, 如果 φ 是恒同映射而且 $K=Sd^{(r)}L$, 則根据命題 5.4 与 5.9 中的(ii), $\varphi=1: Sd^{(r)}L$

$\to L$ 具有星形性质，而且(任意取定的) r 个标准映射 $Sd^{(r)}L\to Sd^{(r-1)}L\to\cdots\to L$ 的积 $\underline{\pi}^{(r)}$ 是 φ 的一个单純逼近，因而这时的星形同态就是 r 个标准同态的积，所以它也是同构.

回到 φ 是具有星形性质的同胚的情形. 这时候，$\varphi^{-1}\colon L\to K$ 是映射；根据命題 5.7，存在一整数 $m\geqslant 0$，使得

$$\varphi^{-1}\colon Sd^{(m)}L\to K$$

具有星形性质. 根据定理 5.8，它有一个单純逼近 $\underline{g}$，决定唯一的一个星形同态

$$g_*\colon H_q(Sd^{(m)}L)\to H_q(K).$$

$\underline{f}\,\underline{g}$ 是恒同映射

$$\varphi\varphi^{-1}=1\colon Sd^{(m)}L\to L$$

的一个单純逼近[命題 5.9 的(ii)]，它誘导出同态(命題 2.4)

$$f_*g_*\colon H_q(Sd^{(m)}L)\to H_q(L).$$

因此 f_*g_* 是恒同映射 $1\colon Sd^{(m)}L\to L$ 所决定的星形同态(图 7). 根据上一段的論述，f_*g_* 就是 $\pi_*^{(m)}$，所以是同构. 然后純粹从群考慮，f_* 必定是满同态.（复习題.）

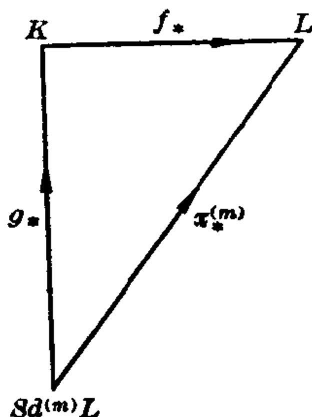


图　7

这里証明了的結果是：具有星形性质的同胚所决定的星形同态是满同态. 把这結果应用到星形同态 g_*，立刻得知 g_* 也是满同态. 然后再純粹从群考慮，容易从 f_*g_* 是同构推知 f_* 是单一同态.（复习題.）于是 f_* 是同构. 这就完成了第一步的証明.

第二步，不假定同胚 $\varphi\colon K\to L$ 具有星形性质. 則存在一个整数 $r\geqslant 0$ 使得 $\varphi\colon Sd^{(r)}K\to L$ 具有星形性质；这时候

$$f_*^{(r)}Sd_*^{(r)}\colon H_q(K)\to H_q(L) \tag{4}$$

是同构，这里的 $f_*^{(r)}$ 是由 $\varphi\colon Sd^{(r)}K\to L$ 所决定的、同調群之間的

星形同构（第一步的结论），而 $Sd_*^{(r)}$ 是 r 个重分同构 $H_q(K)\to H_q(SdK)\to\cdots\to H_q(Sd^{(r)}K)$ 的积(定理 4.3)．∎

因为本定理，一个复形的同调群能够看作是这复形的**多面体的同调群**.

附　记　式(4)中的同构是否依赖于 r 与 $\underline{f}^{(r)}$ 呢？这问题的解答见下一节中定理 6.1.

6．映射的同调性质·同调群的伦型不变性·Brouwer 不动点定理

本节将继续前一节的讨论，来证明更广泛的三个基本定理(6.1, 6.3 与 6.5).

Brouwer 不动点定理在数学中有广泛的应用．利用我们在本章中所建立的同调论工具,它的证明是十分简短的.

上节末尾附记中所提出的问题的研究，立刻引导我们得到下面的定理.

6.1 定理(映射的同调性质)　设 K 与 L 是两个复形，而且 $\varphi: K\to L$ 是一个映射．设 $r(\geqslant 0)$ 是任一整数使得 $\varphi: Sd^{(r)}K\to L$ 具有星形性质,而且 $\underline{f}: Sd^{(r)}K\to L$ 是 $\varphi: Sd^{(r)}K\to L$ 的任一单纯逼近(定理 5.8)．则同调群之间的同态

$$f_*Sd_*^{(r)}: H_q(K)\to H_q(L) \tag{1}$$

不依赖于 r 与 $\underline{f}$，这里的 f_* 是由 $\varphi: Sd^{(r)}K\to L$ 的单纯逼近 $\underline{f}$ 所决定的、同调群之间的星形同态,而 $Sd_*^{(r)}$ 是 r 个重分同构 $H_q(K)\to H_q(SdK)\to\cdots\to H_q(Sd^{(r)}K)$ 的积.

我们把 $f_*Sd_*^{(r)}$ 叫作映射 $\varphi: K\to L$ **所诱导出的同态**，记作 φ_*:

$$\varphi_*=f_*Sd_*^{(r)}.$$

证　明　根据命题 5.9 中的 (ii),我们只知道,对于给定的 r,

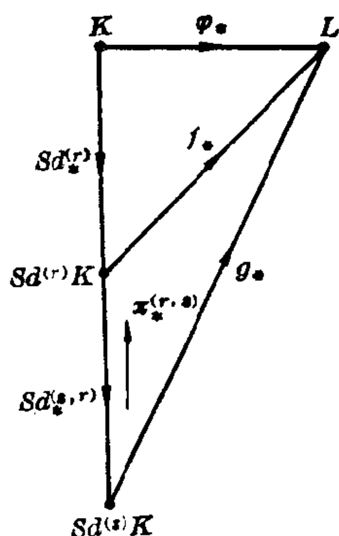


图 8

$f_*Sd_*^{(r)}$ 不依賴于 $\underline{f}$.

現在設 $s(\geqslant 0)$ 是另一整数，使得 $\varphi: Sd^{(s)}K \to L$ 具有星形性质，而且有一单純逼近 $\underline{g}: Sd^{(s)}K \to L$; 因而得另一同态 $g_*Sd_*^{(s)}: H_q(K) \to H_q(L)$. 我們的目的是要証明

$$g_*Sd_*^{(s)} = f_*Sd_*^{(r)}: H_q(K) \to H_q(L). \quad (2)$$

(图 8 可以帮助理解下面的証明.)

可假設 $s \geqslant r$, 而不妨一般性. 命 $Sd_*^{(s,r)}$ 为下列 $s-r$ 个重分同态

$$H_q(Sd^{(r)}K) \to H_q(Sd^{(r+1)}K) \to \cdots \to H_q(Sd^{(s)}K)$$

的积，$\underline{\pi}^{(r,s)}$ 为下列 $s-r$ 个(任意取定的)标准映射

$$Sd^{(s)}K \to Sd^{(s-1)}K \to \cdots \to Sd^{(r)}K$$

的积. 然后从 $Sd_*^{(s,r)}$ 等定义，有

$$Sd_*^{(s)} = Sd_*^{(s,r)}Sd_*^{(r)}, \quad (3)$$

而且从定理 4.3, 有

$$\pi_*^{(r,s)} = \{Sd_*^{(s,r)}\}^{-1}. \quad (4)$$

根据例 5.1 与命题 5.9 中的(ii), $\underline{f}\underline{\pi}^{(r,s)}: Sd^{(s)}K \to L$ 也同 g 一样的是映射 $\varphi: Sd^{(s)}K \to L$ 的单純逼近；因而根据命题 5.9 中的 (iii) 与命题 2.4,

$$g_* = f_*\pi_*^{(r,s)}: H_q(Sd^{(s)}K) \to H_q(L). \quad (5)$$

然后根据式(5)、式(4)与式(3), 得

$$\begin{aligned} g_*Sd_*^{(s)} &= f_*\pi_*^{(r,s)}Sd_*^{(s)} \\ &= f_*\{Sd_*^{(s,r)}\}^{-1}Sd_*^{(s)} \\ &= f_*Sd_*^{(r)}; \end{aligned}$$

这就証明了式(2). ∎

6.2 定理 如果 $\varphi: K \to L$, $\psi: L \to M$ 都是从复形到复形的映

射,则 $(\psi\varphi)_*=\psi_*\varphi_*:H_q(K)\to H_q(L)$.

証 明 設 $s(\geqslant 0)$ 是一整数, 使得 $\psi:Sd^{(s)}L\to M$ 具有星形性质而且有一单純逼近 $\underline{g}$ (定理 5.8). 根据前一定理,有

$$\psi_*=g_*Sd_*^{(s)}:H_q(L)\to H_q(M).$$

設 $r(\geqslant 0)$ 是一整数, 使得 φ: $Sd^{(r)}K\to Sd^{(s)}L$ 具有星形性质而且有一单純逼近 $\underline{f}$ (图 9). 命 $\underline{\pi}^{(s)}$ 为下列 s 个(任意取定的)标准映射

$$Sd^{(s)}L\to Sd^{(s-1)}L\to\cdots\to L$$

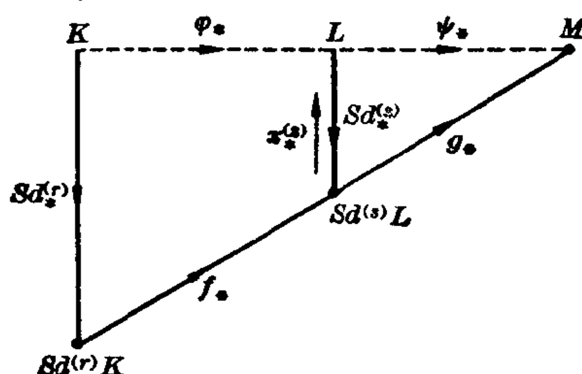


图 9

的积. 然后,根据前面几次用过的論証,推知 $\underline{\pi}^{(s)}\underline{f}$: $Sd^{(r)}K\to L$ 是具有星形性质的映射 $\varphi:Sd^{(r)}K\to L$ 的一个单純逼近. 因而,根据定理 6.1,

$$\varphi_*=\pi_*^{(s)}f_*Sd_*^{(r)}:H_q(K)\to H_q(L).$$

現在 $\psi\varphi:Sd^{(r)}K\to M$ 具有星形性质, 而且有一单純逼近 $\underline{gf}:Sd^{(r)}K\to M$. 所以

$$(\psi\varphi)_*=g_*f_*Sd_*^{(r)}:H_q(K)\to H_q(M).$$

但从定理 4.3, 有

$$Sd_*^{(s)}\pi_*^{(s)}=1;$$

于是

$$(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*. \ ]$$

本节中将証明的另一个基本定理是：

6.3 定理 同倫的映射 $\varphi\simeq\psi: K\to L$ 誘导出同一个同态 $\varphi_*=\psi_*: H_q(K)\to H_q(L)$.

在証明本定理之前，我們需要找出同倫映射与单純逼近的联系. 設 $\varphi\simeq\psi: K\to L$ 从 φ 到 ψ 的倫移 $H: \varphi\simeq\psi$ 是映射 $H: |K|\times I\to L$(定义 II 9.1). 如果記 $\varphi_t(x)=H(x, t)$, $x\in|K|$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 即 $t\in I$, 則 $\varphi_0=\varphi$, $\varphi_1=\psi$.

6.4 引理 設 $\varphi, \psi: K\to L$ 是同倫的两个映射，而且 $H: \varphi\simeq\psi$, 这里 $H: |K|\times I\to L$. 則存在一个正整数 k 与一个整数 $r(\geqslant 0)$, 使得对于 $h=1, 2, \cdots, k$, 映射 $\varphi_{(h-1)/k}$ 与 $\varphi_{h/k}: Sd^{(r)}K\to L$ 具有星形性质而且有一个公共的单純逼近 $f^{(h)}: Sd^{(r)}K\to L$.

証 明 L 的全体开星形 $\mathrm{st}\, b^j$ 形成 $|L|$ 的一个开复盖，既然 H 連續, $H^{-1}(\mathrm{st}\, b^j)$ 就形成 $|K|\times I$ 的一个开复盖(图 10). $|K|\times I$ 是一个列紧度量空間，根据定理 I 5.2, 存在一个 Lebesgue 数 λ, 使得 $|K|\times I$ 的直徑小于 λ 的任一子集完全属于一个 $H^{-1}(\mathrm{st}\, b^j)$. 取 r 使得 $Sd^{(r)}K$ 的单形的直徑的最大值 $<\frac{\lambda}{4}$, 取 k 使得 $\frac{1}{k}<\frac{\lambda}{2}$.

于是对于 $Sd^{(r)}K$ 的每一开星形 $\mathrm{st}\, a^i$ 及 $h=1, \cdots, k$, $\mathrm{st}\, a^i\times\left[\frac{h-1}{k}, \frac{h}{k}\right]$ 的直徑小于 λ, 因而至少属于一个 $H^{-1}(\mathrm{st}\, b^j)$. 設

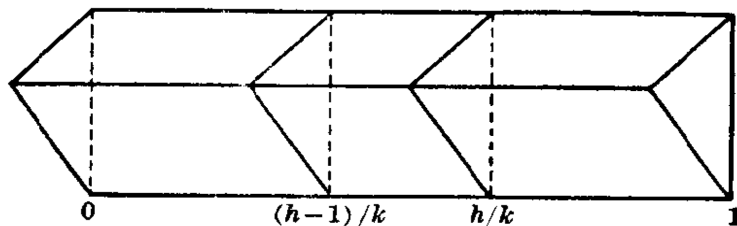


图 10 $|K|\times I=s^2\times I$

$\operatorname{st} a^i \times \left[\frac{h-1}{k}, \frac{h}{k}\right] \subset H^{-1}(\operatorname{st} b^{j(h,i)})$. 則 $H\left(\operatorname{st} a^i \times \left[\frac{h-1}{k}, \frac{h}{k}\right]\right) \subset$ $\operatorname{st} b^{j(h,i)}$, 所以 $\varphi_{(h-1)/k}(\operatorname{st} a^i) \subset \operatorname{st} b^{j(h,i)}$ 且 $\varphi_{h/k}(\operatorname{st} a^i) \subset \operatorname{st} b^{j(h,i)}$. 把由頂点对应 $a^i \to b^{j(h,i)}$所决定的单純映射記作 $\underline{f}^{(h)}: Sd^{(r)}K \to L$. 則 $\underline{f}^{(h)}$ 是映射 $\varphi_{(h-1)/k}$ 与 $\varphi_{h/k}$ 的公共的单純逼近(見定理 5.6). ▌

定理 6.3 的証明 用引理 6.4 的結論. 因为 $\varphi = \varphi_0: Sd^{(r)}K \to L$ 与 $\psi = \varphi_1: Sd^{(r)}K \to L$ 具有星形性质, 而且分别有单純逼近 $\underline{f}^{(1)}: Sd^{(r)}K \to L$ 与 $\underline{f}^{(k)}: Sd^{(r)}K \to L$, 从定理 6.1 有

$$\varphi_* = f_*^{(1)} Sd_*^{(r)}, \quad \psi_* = f_*^{(k)} Sd_*^{(r)}. \tag{6}$$

又因为 $\varphi_{h/k}: Sd^{(r)}K \to L$ 具有星形性质,而且 $\underline{f}^{(h)}, \underline{f}^{(h+1)}: Sd^{(r)}K \to L$ 都是 $\varphi_{h/k}$ 的单純逼近,从定理 6.1 又有

$$f_*^{(h)} Sd_*^{(r)} = f_*^{(h+1)} Sd_*^{(r)}, \quad h = 1, \cdots, k-1.$$

这些方程結合着方程(6)就給出所求的結論. ▌

从定理 6.1 到 6.3 我們立刻得到下面的主要定理.

6.5 定理(同調群的倫型不变性) 如果多面体 $|K|$ 与 $|L|$ 具有相同倫型(定义 II 9.4), 則复形 K 与 L 的同維同調群同构.

更明确地説,如果映射 $\varphi: K \to L$ 是同倫等价,則 φ_* 是同构:

$$\varphi_*: H_q(K) \approx H_q(L). \tag{7}$$

証 明 設 $\psi: L \to K$ 是 φ 的同倫逆; 因而 $\psi\varphi \simeq 1: K \to K$. 因为这个恒同映射 1 是单純映射, 显然

$$1_* = \text{恒同同态 } 1: H_q(K) \to H_q(K).$$

根据定理 6.1 到 6.3, $\psi_*\varphi_* = 1$. 同样地有 $\varphi_*\psi_* = 1$. 于是有式 (7), 以及 $\psi_* = \varphi_*^{-1}$. ▌

定理 5.7 显然是本定理的推論. 本定理的証明与定理 5.7 的証明虽有相似之处,但前者并未用后者.

以下我們从本节中的定理推导 Brouwer 不动点定理.

6.6 定理　n 維球 S^n 的恒同映射不能扩張(定义 I 3.1 后)成映射 $\varphi: V^{n+1}\to S^n$，这里的 V^{n+1} 是以 S^n 为面的实心球.

証　明　从連通性考虑，$n=0$ 时的命題是明显的．設 $n>0$. 再者，因为扩張是拓扑概念，我們可假設 $V^{n+1}=\underline{s}^{n+1}$, $S^n=|\dot{s}^{n+1}|$ 而不妨一般性，这里的 $\underline{s}^{n+1}$ 是一个 $n+1$ 維的单形，也看作是它的閉包复形.

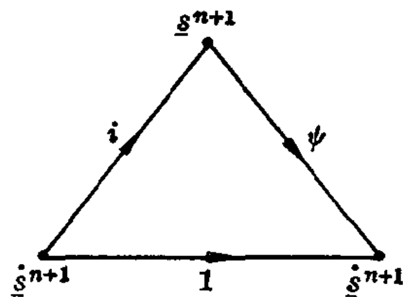


图 11

命 $i: \dot{s}^{n+1}\to \underline{s}^{n+1}$ 为包含映射．用反証法，設 $1: \dot{s}^{n+1}\to \dot{s}^{n+1}$ 能扩張为 $\psi: \underline{s}^{n+1}\to \dot{s}^{n+1}$，因而 $\psi i=1$ (图 11)．根据定理 6.2，有 $\psi_{n*}i_{n*}=1$．但这是矛盾；因为 $H_n(\underline{s}^{n+1})=0$ 蘊涵 $\psi_{n*}i_{n*}$ 是零同态，因而不可能是恒同同构 $1: H_n(\dot{s}^{n+1})\to H_n(\dot{s}^{n+1})$．∎

6.7 定理(Brouwer 不动点定理)　n 維实心球 V^n 的任意自映射 $\varphi: V^n\to V^n$ 至少有一个不动点，即至少有一个点 $x\in V^n$ 使得 $\varphi(x)=x$.

証　明　$n=0$ 时命題是平庸的．設 $n>0$．用反証法．設对于任一点 $x\in V^n$, $\varphi(x)\neq x$．然后有向綫段 $\overrightarrow{\varphi(x)x}$ 的延长交 S^{n-1} 于一点 $\psi(x)$ (图 12)；$\psi: V^n\to S^{n-1}$ 是一个映射．(见习題 1.)　現在 $\psi|S^{n-1}=$ 恒同映射；这与定理 6.6 矛盾．∎

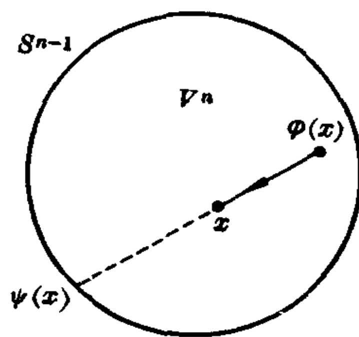


图 12

附　記　我們是用定理 6.6 証明定理 6.7 的．其实，定理 6.7 也蘊涵定理 6.6 (見习題 3)．可以說这两个定理是互相“等价”的，只要用某种方法証明了其中之一，另一个就成为推論．还有一个与它們“等价”的定理：S^n 的恒同映射非零倫(定义 I 9.1 后)．(复习題.)

在结束本节之前，我们要提一提常用的一个定义：

6.8 定义 设 K 与 L 都是 $n(>0)$ 维的能定向的闭假流形，而且 α 与 β 分别是它们的基本闭链（定义 4.1 后），从而分别是它们的 n 维的整同调群（都 $\approx J$）的生成元．如果映射 $\varphi: K\to L$ 使得 $\varphi_{i*}(\alpha)=k\beta$（这里 k 必然是一个整数），k 就叫作 **φ 的映射度**，记作 $\deg\varphi$.

根据定理 6.3，还有：$\varphi'\simeq\varphi\Rightarrow\deg\varphi'=\deg\varphi$.

习　题

1．试用解析式子证明：图 12 中的 $\psi(x)$ 是映射．

2．试用定理 6.7 来证明定理 6.6.

3．设 (a_{ij}) 是一个 n 阶的实方阵，其元素 a_{ij} 都非负数，而且其行列式 $|a_{ij}|\neq 0$. Frobenius 定理说：这样的一个方阵 (a_{ij}) 有一个正的实特征根；即存在一个正实数 λ，使得 $|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$，这里 $\delta_{ij}=0$ 当 $i\neq j$，而且 $\delta_{ii}=1$.

［提示：考虑射影空间 P^{n-1} 的自映射

$$x'_i=\sum a_{ij}x_j,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

并说明它也是 P^{n-1} 中的由 $x_i\geqslant 0$ 决定的一个 $n-1$ 维单形的自映射．］

4．设 $\varphi: S^2\to S^2$ 是二维球 S^2 的一个自映射．试作一个映射 φ，使得 $\deg\varphi$ 等于给定的任一整数 k.

把 S^2 换成环面，解决同样的问题．

7．Lefschetz 不动点定理

Lefschetz 不动点定理 7.3 是关于多面体的自映射的不动点存在的定理．而 Brouwer 不动点定理 6.7 只是关于 $n(>0)$ 维实心球这一特殊的多面体的，所以只是定理 7.3 的特例．

本节内容只是定理 7.3 的证明．本节中的链群和同调群等都限于以整数加群为其系数群．

为着叙述这个定理，先要引进一些概念．

弱同调的概念·Lefschetz 不动点定理的叙述

设 K 是一个复形. 对于闭链 $z, z' \in Z_q(K)$, 如果存在非零整数 m 使 $m(z-z') \sim 0$, 则称 z 与 z' **弱同调**.

显然, $Z_q(K)$ 中全体弱同调于 0 的元素组成 $Z_q(K)$ 的一个子群. 这个子群就是 $B_q(K)$ 在 $Z_q(K)$ 中(也是在 $C_q(K)$ 中)的除闭包 $\overline{B}_q(K)$, 叫作 K 的 **q 维弱边缘链群**. 记

$$\overline{H}_q(K) = Z_q(K)/\overline{B}_q(K),$$

叫作 K 的 **q 维弱同调群**.

根据命题 B 5.3, $\overline{H}_q(K)$ 是自由群, 而且

$$\overline{H}_q(K) \approx H_q(K)/T_q(K),$$

其中 $T_q(K)$ 表示 $H_q(K)$ 的挠子群.

设 $f=\{f_q\}$ 是复形 K 到 L 的一个链映射, 则 f_q 将 $\overline{B}_q(K)$ 映到 $\overline{B}_q(L)$ 中. 事实上, 如果 $z \in \overline{B}_q(K)$, 则有非零整数 m 使得 $mz \in B_q(K)$, 从而 $mf_q(z)=f_q(mz) \in B_q(L)$, 所以 $f_q(z) \in \overline{B}_q(L)$. 于是 f 诱导出弱同调群的同态 $\overline{f}_*=\{\overline{f}_{q*}\}$:

$$\overline{f}_{q*}: \overline{H}_q(K) \to \overline{H}_q(L).$$

在定理 6.1 中, 如果把同调群换成弱同调群, 对定理的证明是不会造成任何困难的. 于是得到

7.1 定理　设 K 与 L 是两个复形, 而且 $\varphi: K \to L$ 是一个连续映射. 设 $r \geqslant 0$ 使得 $\varphi: Sd^{(r)}K \to L$ 具有星形性质, 而且 $\underline{f}: Sd^{(r)}K \to L$ 是 $\varphi: Sd^{(r)}K \to L$ 的一个单纯逼近, 则弱同调之间的同态

$$\overline{f}_*\overline{Sd}_*^{(r)}: \overline{H}(K) \to \overline{H}(L)$$

不依赖于 r 和 $\underline{f}$, 把它记作 $\overline{\varphi}_*$:

$$\overline{\varphi}_* = \overline{f}_*\overline{Sd}_*^{(r)}.$$

7.2 定义　设 φ 是 n 维复形 K 的一个自映射. 数

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \mathrm{Tr}(\bar{\varphi}_{q*},\ \bar{H}_q(K))$$

叫作 φ 的 **Lefschetz 数**，记作 $L(\varphi)$：

$$L(\varphi)=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \mathrm{Tr}(\bar{\varphi}_{q*},\ \bar{H}_q(K)).$$

这里的迹数记号 Tr 见命题 B 5.1.

现在我们能叙述

7.3 定理 (Lefschetz 不动点定理)　如果 n 维复形 K 的一个自映射 φ 的 Lefschetz 数 $L(\varphi)\neq 0$, 则 φ 至少有一个不动点.

在证明这个定理之前，我们从它推导出定理 6.7 (Brouwer 不动点定理)如下. 对于 K 是实心球 V^n, $H_q(V^n)=0$ 当 $q>0$, 所以 $\mathrm{Tr}(\bar{\varphi}_{q*},\ \bar{H}_q(V^n))=0$; 而从零维同调群的几何意义有 $\mathrm{Tr}(\varphi_{0*},\ \bar{H}_0(V^n))=1$. 因而 $L(\varphi)=1$, φ 至少有一个不动点.

Hopf 迹数引理・不动的单形

为了证明定理 7.3, 还需要作一些准备.

7.4 引理 (Hopf 迹数引理)　如果 $h=\{h_q\}$ 是复形K到自身的链映射：

$$h_q: C_q(K)\rightarrow C_q(K),$$

$\bar{h}_*$ 是它诱导出的弱同调群的自同态：

$$\bar{h}_{q*}: \bar{H}_q(K)\rightarrow \bar{H}_q(K),$$

则

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \mathrm{Tr}(\bar{h}_{q*},\ \bar{H}_q(K))=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \mathrm{Tr}(h_q,\ C_q(K)).$$

在证明这个引理之前，将它和定理 III. 5.3 (Euler-Poincaré 公式)作一比较. 如果设 h 就是恒同同态，则 $\mathrm{Tr}(h_q,\ C_q(K))$ 等于 K的 q 维单形的个数 α_q, 而 $\mathrm{Tr}(\bar{h}_{q*},\ \bar{H}_q(K))$等于 K的 q 维 Betti 数 R_q, 于是引理的结论就可写成

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\alpha_q.$$

这就是 Euler-Poincaré 公式. 因此, 引理 7.4 可看作 Euler-Poincaré 公式的推广. 不仅如此, 它的证明方法也同 Euler-Poincaré 公式的证法相似,而区别在于:后者用链群的秩, 而前者用链群自同态的迹数.

证 明 对 $Z_q(K)$, h_q 应用迹数可加性定理 (B 5.4), 得到

$$\operatorname{Tr}(h_q,\ Z_q(K))=\operatorname{Tr}(h_q,\ B_q(K))+\operatorname{Tr}(\bar{h}_{q*},\ \overline{H}_q(K)).\quad(1)$$

设 $\tilde{h}_q:C_q(K)/Z_q(K)\to C_q(K)/Z_q(K)$ 是 h_q 诱导出的同态, 对 $C_q(K)$, h_q 应用迹数可加性定理, 得到

$$\operatorname{Tr}(h_q,\ C_q(K))=\operatorname{Tr}(h_q,\ Z_q(K))+\operatorname{Tr}(\tilde{h}_q,\ C_q(K)/Z_q(K)).\quad(2)$$

把(1)代入(2), 得到

$$\operatorname{Tr}(h_q,\ C_q(K))=\operatorname{Tr}(h_q,\ B_q(K))+\operatorname{Tr}(\bar{h}_{q*},\ \overline{H}_q(K))+\operatorname{Tr}(\tilde{h}_q,\ C_q(K)/Z_q(K)).\quad(3)$$

因为边缘同态 $\partial_q:C_q(K)\to B_{q-1}(K)$ 是满同态, 而且 ∂_q 核 $=Z_q(K)$, 则可诱导出同构

$$\tilde{\partial}_q:C_q(K)/Z_q(K)\to B_{q-1}(K).$$

而且有 $h_{q-1}\tilde{\partial}_q=\tilde{\partial}_q\tilde{h}_q$. 事实上, 对于 $x^*\in C_q(K)/Z_q(K)$ 与 x^* 的代表 x, 有

$$h_{q-1}\tilde{\partial}_q(x^*)=h_{q-1}\partial_q(x)=\partial_q h_q(x)=\tilde{\partial}_q((h_q(x))^*)=\tilde{\partial}_q h_q(x^*).$$

根据命题 B 5.2 得到

$$\operatorname{Tr}(\tilde{h}_q,\ C_q(K)/Z_q(K))=\operatorname{Tr}(h_{q-1},\ B_{q-1}(K)).$$

把它代入(3), 得到

$$\operatorname{Tr}(h_q,\ C_q(K))=\operatorname{Tr}(\bar{h}_{q*},\ \overline{H}_q(K))+\operatorname{Tr}(h_q,\ B_q(K))+\operatorname{Tr}(h_{q-1},\ B_{q-1}(K)).$$

这就给出

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\operatorname{Tr}(h_q, C_q(K))=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\operatorname{Tr}(\bar{h}_{q*}, \bar{H}_q(K))$$
$$+(-1)^n\operatorname{Tr}(h_n, B_n(K))$$
$$+\operatorname{Tr}(h_{-1}, B_{-1}(K)).$$

因为 $B_n(K)=0$, $B_{-1}(K)=0$, 所以有本引理的结论. ▌

由引理 7.4 可知,对于定理 7.1 中所述的 φ, $\underline{f}$ 与 r, 有

$$L(\varphi)=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\operatorname{Tr}(f_q Sd_q^{(r)}, C_q(K)).$$

设 $\underline{f}:Sd^{(r)}K\to K$ 是一个单纯映射, $\underline{s}$ 是 $Sd^{(r)}K$ 的一个单形. 如果 $\underline{s}$ 在 $\underline{f}$ 下非退化,即 $\underline{f}$ 把 $\underline{s}$ 映成 K 中一个相同维数的单形 $\underline{t}$, 而且 $\underline{s}$ 就在 $Sd^{(r)}\underline{t}$ 中,则称 $\underline{s}$ 是 $\underline{f}$ 的一个**不动单形**.

如果规定了 $\underline{s}$ 的一个定向, 得到定向单形 s, 而且由 $\underline{f}$ 的对应关系决定 $\underline{t}$ 的一个定向, 得到定向单形 t, 则 s 在 $Sd^{(r)}t$ 中出现的系数或是 $+1$, 或是 -1, 而且正负的取定与 $\underline{s}$ 定向的选择无关 ($\underline{s}$ 的定向与 $\underline{t}$ 的定向同时改变). 因此我们可按这系数的正负把 $\underline{f}$ 的不动单形分成正、负两类.

7.5 定义 设 $\underline{f}:Sd^{(r)}K\to K$ 是单纯映射,把 $\underline{f}$ 的 q 维的正的不动单形的个数与 q 维的负的不动单形的个数之差称作 $\underline{f}$ **的 q 维的不动单形的个数**.

7.6 引理 设 $\underline{f}:Sd^{(r)}K\to K$ 是一单纯映射, 则 $\underline{f}$ 的 q 维的不动单形的个数等于 $\operatorname{Tr}(f_q Sd_q^{(r)}, C_q(K))$.

证 明 设 $\{t_i^q\}$, $q=0, 1, \cdots, n$, $i=1, 2, \cdots, \alpha_q$, 是 K 的有向单形的一个基本组, 则 $t_1^q, t_2^q, \cdots, t_{\alpha_q}^q$ 组成 $C_q(K)$ 的一个基. 设

$$f_q Sd_q^{(r)}(t_i^q)=\sum_{j=1}^{\alpha_q}a_{ij}t_j^q,\qquad i=1, \cdots, \alpha_q.$$

按照迹数的定义,

$$\operatorname{Tr}(f_q Sd_q^{(r)},\ C_q(K)) = \sum_{i=1}^{\alpha_q} a_{ii},$$

而且 a_{ii} 恰好是 $\underline{f}$ 在 $Sd^{(r)}t_i^q$ 中的 q 维的正的不动单形的个数与 q 维的负的不动单形的个数之差，因此 $\sum_{i=1}^{\alpha_q} a_{ii}$ 就等于 $\underline{f}$ 的 q 维不动单形的个数. ∎

Lefschetz 不动点定理证明的完成与附记

定理 7.3 的证明　由于 $|K|$ 是列紧的，而且 φ 是连续的，只需要证明：对任一 $\varepsilon>0$，存在一点 $x\in|K|$，使得 $\rho(x, \varphi(x))<\varepsilon$.

设给定了 $\varepsilon>0$. 不妨设 K 的每个单形的直径都小于 $\varepsilon/2$（否则用 K 的适当次重分来替代 K）. 设 $r\geqslant 0$ 使得 $\varphi: Sd^{(r)}K\to K$ 具有星形性质，而且 $\underline{f}: Sd^{(r)}K\to K$ 是 $\varphi: Sd^{(r)}K\to K$ 的一个单纯逼近，因而对于每一点 $x\in|K|$，$\rho(\underline{f}(x), \varphi(x))<\varepsilon/2$.

根据引理 7.4,

$$L(\varphi)=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \operatorname{Tr}(f_q Sd_q^{(r)},\ C_q(K)).$$

从本定理的假设 $L(\varphi)\neq 0$，则至少有一个 q 使得

$$\operatorname{Tr}(f_q Sd_q^{(r)},\ C_q(K))\neq 0.$$

再用引理 7.6，推出 $\underline{f}$ 至少有一个 q 维的不动单形 $\underline{s}^q$，那么对于 $\underline{s}^q$ 中的点 x，$\rho(x, \underline{f}(x))<\varepsilon/2$. 于是

$$\rho(x, \varphi(x))\leqslant\rho(x, \underline{f}(x))+\rho(\underline{f}(x), \varphi(x))<\varepsilon. \ ∎$$

附记 1　把定理 6.3 中的同调群改成弱同调群，则得到：同伦的映射 $\varphi\simeq\psi: K\to L$ 诱导出同一个同态 $\bar{\varphi}_*=\bar{\psi}_*: \bar{H}(K)\to\bar{H}(L)$. 于是，若 K 的两个自映射 φ, ψ 同伦，则 $L(\varphi)=L(\psi)$. 这个结论，有时能帮助我们计算 Lefschetz 数.

附记 2　我们定义 Lefschetz 数是用的自由群的自同态的迹

数，为此要限制链群以整数加群为系数群，并要引进弱同调的概念（同调群不一定是自由群）．我们也可用有理数域 Q 来替代整数加群，作为系数群，这时链群，同调群都成了 Q 上的线性空间，因而可用线性变换的迹数来替代自由群的自同态的迹数．关于这一问题，可说明如下．用有理系数的同调群定义的 Lefschetz 数与用整系数弱同调群定义的 Lefschetz 数是相等的，所以也是整数．原因是，在链群上看，单纯映射在有理系数链群上诱导的链映射与它在整系数链群上诱导的链映射，它们的方阵是同一个整数方阵．

习　题

1．零调的 n 维复形的任一自映射至少有一个不动点．

2．n 维复形的任一同伦于零的自映射有不动点．（参看附记 1．）

3．如果 n 维复形的 Euler-Poincaré 示性数不等于零，则它的任一同伦于恒同映射的自映射有不动点．

4．设 f 是 n 维球 S^n 的自映射，$f(S^n)\neq S^n$，求证 f 有不动点．

5．求证 Poincaré-Brouwer 定理：当 n 为偶数时，n 维球 S^n 的自映射或具有不动点，或有一点 a，使得 $f(a)$ 是 a 的对径点．

6．如果 f 是 n 维（n 是偶数）射影空间 P^n 的自映射，则 f 有不动点．

第五章　同调序列·流形的对偶定理

在第三章中我们引进了同调群．现在在本章中，我们将改用上边缘(§2)与相对边缘(§3)的概念为出发点，但遵循第三章中的方法，另行引进三种同调群：上同调群、相对下同调群与相对上同调群．按照本章的意义，第三章中的边缘与同调群此后分别改叫作**下边缘**与**下同调群**．

为着说得更明确一些，设 K 是一个复形(本书中只限于有限复形)，而且 L 是 K 的一个非空子复形．则 K 与 L 都各有下同调群与上同调群；而相对于 L 说，K 有相对下同调群与相对上同调群．复形 K 与其子复形 L 的这四种同调群有密切的关系，反映 K 与 L 的几何性质之间的关系．本章中有不少定理与例子，说明这种关系．特别重要的是 K 与 L 的同调序列这一概念及其定理(定理 4.4 与 4.4c)．

由于下边缘、上边缘与相对边缘各有其几何意义，这四种同调群自然各有其作用．本章最后一节的内容就是证明一个重要定理，流形的对偶定理(§7)；它的证明就将综合地用到下同调群、上同调群以及相对下同调群．

1. 同　态　群

本节讨论交换群，可以看作是附录 B 的继续．它是下一节所需要的准备知识．

设 A 与 G 是任意两个群（本节中只限于交换群）．考虑所有的从群 A 到群 G 的同态．对于任意两个这种的同态 f 与 h，用

$$(f+h)(a)=f(a)+h(a),\quad a\in A$$

来定义它们的和 $f+h$．容易验证，这就使所有的这种同态形成一个交换群，叫作从群 A 到群 G 的**同态群**，记作 $\mathrm{Hom}(A, G)$．我们还把 $f(a)$ 写作

$$\langle f, a\rangle,$$

叫作 f 与 a 的 **Kronecker 积**或**指数**．容易看出，$\langle f, a\rangle$是 f 与 a 的双线性函数．

如果 A 不是群，而是向量空间，而且 G 是实数域，则在向量空间的理论中 $\mathrm{Hom}(A, G)$ 叫作 A 的对偶空间．

本节先考虑任意群 A 与 G 的 $\mathrm{Hom}(A, G)$，然后只限于 A 是有限维的自由群以及 G 是整数加群 J．这两部分中只分别讨论“对偶同态”与“对偶基”这两个概念．

1.1 命题　设 A, B 与 G 都是任意群，而且 $f:A\to B$ 是一个同态．对于任意元素 $a\in A$ 与任意元素 $\beta\in\mathrm{Hom}(B, G)$，用下列方程

$$\langle f^{\cdot}(\beta), a\rangle=\langle\beta, f(a)\rangle \tag{1}$$

来定义 $f^{\cdot}$．则 $f^{\cdot}$ 是一个同态：$\mathrm{Hom}(B, G)\to\mathrm{Hom}(A, G)$．同态 $f^{\cdot}$ 叫作 f 的**对偶同态**．

我们通常用下面的图来形象地表出 f 与 $f^{\cdot}$ 以及式(1)：

$$\begin{array}{ccc}
a\in A & \xrightarrow{f} & B\\
\| & & \|\\
\mathrm{Hom}(A, G) & \xleftarrow{f^{\cdot}} & \mathrm{Hom}(B, G)\ni\beta\\
\Downarrow & & \Downarrow\\
\langle f^{\cdot}(\beta), a\rangle & = & \langle\beta, f(a)\rangle\in G
\end{array}$$

证　明　从式(1)，对于一个给定的 β, $f^{\cdot}(\beta)$ 是一个单值对应 $A\to G$．因为式(1)，因为 f 是同态，以及因为 Kronecker 积是

第二个变元的线性函数，所以对于 $a_1, a_2 \in A$,

$$\langle f^{\cdot}(\beta), a_1+a_2\rangle=\langle \beta, f(a_1+a_2)\rangle=\langle \beta, f(a_1)+f(a_2)\rangle$$
$$=\langle \beta, f(a_1)\rangle+\langle \beta, f(a_2)\rangle=\langle f^{\cdot}(\beta), a_1\rangle+\langle f^{\cdot}(\beta), a_2\rangle.$$

这就说明了 $f^{\cdot}(\beta): A\to G$ 是一个同态，即 $f^{\cdot}(\beta)\in \mathrm{Hom}(A, G)$. 再者，因为式 (1) 以及因为 Kronecker 积是第一个变元的线性函数，所以对于 $a\in A$ 与 $\beta_1, \beta_2\in \mathrm{Hom}(B, G)$,

$$\langle f^{\cdot}(\beta_1+\beta_2), a\rangle=\langle \beta_1+\beta_2, f(a)\rangle$$
$$=\langle \beta_1, f(a)\rangle+\langle \beta_2, f(a)\rangle=\langle f^{\cdot}(\beta_1), a\rangle+\langle f^{\cdot}(\beta_2), a\rangle$$
$$=\langle f^{\cdot}(\beta_1)+f^{\cdot}(\beta_2), a\rangle.$$

因为 a 是 A 的任意元素，这就给出

$$f^{\cdot}(\beta_1+\beta_2)=f^{\cdot}(\beta_1)+f^{\cdot}(\beta_2).$$

这就证明了 $f^{\cdot}: \mathrm{Hom}(B, G)\to \mathrm{Hom}(A, G)$ 是一个同态. ▮

1.2 推论 如果同态 $f: A\to B$ 与 $h: B\to C$ 的对偶同态分别是 $f^{\cdot}: \mathrm{Hom}(B, G)\to \mathrm{Hom}(A, G)$ 与 $h^{\cdot}: \mathrm{Hom}(C, G)\to \mathrm{Hom}(B, G)$, 则同态 $hf: A\to C$ 的对偶同态是

$$(hf)^{\cdot}=f^{\cdot}h^{\cdot}: \mathrm{Hom}(C, G)\to \mathrm{Hom}(A, G).$$

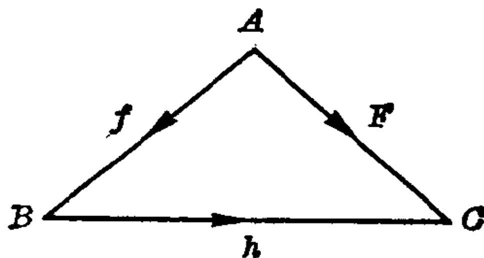
证 明 对于任意元素 $a\in A$ 与 $\gamma\in \mathrm{Hom}(C, G)$,

$$\langle (hf)^{\cdot}(\gamma), a\rangle=\langle \gamma, (hf)(a)\rangle=\langle \gamma, hf(a)\rangle$$
$$=\langle h^{\cdot}(\gamma), f(a)\rangle=\langle f^{\cdot}h^{\cdot}(\gamma), a\rangle.$$

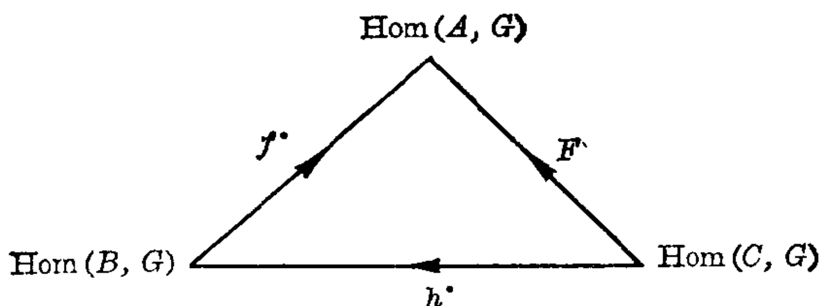
因为 a 是 A 的任意元素，这就给出所求的结论. ▮

然后分别从推论 1.2 与它的证明，立刻得到下面两个推论.

1.3 推论 如果群与同态的表



具有交换性，即 $F=hf$，则相应的表



也具有交换性，即 $F^{\cdot}=f^{\cdot}h^{\cdot}$. ▌

1.4 推论　$hf=0$（零同态）蕴涵 $f^{\cdot}h^{\cdot}=0$. ▌

现在我们只限于考虑有限维的自由群 A 与它的同态群 $\mathrm{Hom}(A, J)$. 以下的讨论都是从 A 具有有限基这一事实出发的.

1.5 引理　如果 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 n 维的自由群 A 的一个基，而且 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 是任意 n 个整数，则同态群 $\mathrm{Hom}(A, J)$ 中恰有一个元素 α，使得

$$\langle\alpha, x_i\rangle=g_i,\quad i=1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

证　明　A 的任一元素 a 有唯一的表示：$a=\sum n_i x_i$，n_i 整数；由于 Kronecker 积是第二个变元的线性函数，对于 $\mathrm{Hom}(A, J)$ 的任一个元素 α，

$$\langle\alpha, a\rangle=\sum n_i\langle\alpha, x_i\rangle.$$

从这个式子立刻推知，如果 $\mathrm{Hom}(A, J)$ 的元素 α 满足式(2)，则它在 A 的元素 a 处所取的值

$$\langle\alpha, a\rangle=\sum n_i g_i \tag{3}$$

都完全确定了；这就是说，$\mathrm{Hom}(A, J)$ 中至多有一个元素 α 满足式(2). 另一方面，如果用式(2)作为在基 X 上定义的函数 α，再根据（以整数为系数的）线性扩张得到在 A 上定义的函数 α，则

$\alpha: A \to J$ 显然是一个同态；这就是说，$\mathrm{Hom}(A, J)$ 中至少有一个元素 α 满足式(2)．▌

1.6 命题 如果 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 n 维的自由群 A 的一个基，则同态群 $\mathrm{Hom}(A, J)$ 恰有一个基 $\Xi=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$，使得

$$\langle \xi_i, x_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j=1, 2, \cdots, n,$$

这里的 $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$ 当 $i \neq j$. 因而 $\mathrm{Hom}(A, J)$ 也是 n 维的自由群. 基 Ξ 叫作 X **的对偶基**，x_i 与 ξ_i 叫作**对应元素**.

证 明 根据引理1.5，对于每一个 i，恰有一个 $\xi_i \in \mathrm{Hom}(A, J)$，使得 $\langle \xi_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$. 所以只需要证明：$\Xi=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 是 $\mathrm{Hom}(A, J)$ 的一个基.

首先，Ξ 是 $\mathrm{Hom}(A, J)$ 中的一组线性无关的元素. 事实上，如果 $\sum g_i \xi_i = 0$，即如果对于所有的 $a \in A$,

$$\langle \sum g_i \xi_i, a \rangle = \sum g_i \langle \xi_i, a \rangle = 0,$$

则特别对于 $a = x_j$,

$$0 = \langle \sum g_i \xi_i, x_j \rangle = \sum g_i \langle \xi_i, x_j \rangle = g_j.$$

其次，$\mathrm{Hom}(A, J)$ 的每一元素 α 都是 Ξ 中的元素的一个线性组合. 事实上，如果设 α 满足式(2)，则对于 A 中任一元素 $a = \sum n_i x_i$，有式(3)．另一方面，

$$\langle \xi_i, a \rangle = \langle \xi_i, \sum n_j x_j \rangle = \sum n_j \langle \xi_i, x_j \rangle = n_i.$$

把这式子替入式(3)，得

$$\langle \alpha, a \rangle = \sum g_i \langle \xi_i, a \rangle = \langle \sum g_i \xi_i, a \rangle;$$

于是 $\alpha = \sum g_i \xi_i$. ▌

1.7 命题 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 与 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ 分别是自由群 A 与 B 的基，而且 $\Xi=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r\}$ 与 $H=\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s\}$ 分别是 X 与 Y 的对偶基. 如果利用基 X 与 Y 时，同

态 $f: A \to B$ 的方程是

$$f(x_i)=\sum_{j=1}^{s} f_{ij} y_j, \quad i=1, 2, \cdots, r, \tag{4}$$

这里 f_{ij} 都是整数，则利用对偶基 Ξ 与 H 时，对偶同态 $f^*: \mathrm{Hom}(B, J) \to \mathrm{Hom}(A, J)$ 的方程是

$$f^*(\eta_i)=\sum_{j=1}^{r} f_{ji} \xi_j, \quad i=1, 2, \cdots, s. \tag{5}$$

方程(5)的整数矩阵是方程(4)的矩阵的转置矩阵。

证 明 因为 f^* 是 f 的对偶同态，

$$\langle f^*(\eta_i), x_j\rangle=\langle \eta_i, f(x_j)\rangle.$$

因为式(4)，从对偶基的定义，有

$$\langle \eta_i, f(x_j)\rangle=\langle \eta_i, \sum f_{jk} y_k\rangle=\sum f_{jk}\langle \eta_i, y_k\rangle=f_{ji}.$$

如果 $f^*(\eta_i)=\sum g_{ij}\xi_j$，同样地有

$$\langle f^*(\eta_i), x_j\rangle=\langle \sum g_{ik}\xi_k, x_j\rangle=\sum g_{ik}\langle \xi_k, x_j\rangle=g_{ij}.$$

于是 $g_{ij}=f_{ji}$. ∎

习 题

1. 试直接从定义证明 $\mathrm{Hom}(J, J) \approx J$, $\mathrm{Hom}(J_m, J)=0$, $m \geqslant 2$.

2. 试证明 $\mathrm{Hom}(J_m, G) \approx {}_mG$, $m=0$ 或 $m \geqslant 2$.

3. 试证：如果 $f: A \to B$ 是满同态，则 $f^*: \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$ 是单一同态.

4. 试举例说明：如果 $f: A \to B$ 是单一同态，则 $f^*: \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$ 可以是满同态，也可以不是满同态.

5. 试证：如果 $f: A \to B$ 是同构，则 $f^*: \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$ 也是同构.

6. 试证：如果 $f: A \to B$ 是单一同态，而且 $f(A)$ 是 B 的直加项，则 $f^*: \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$ 是满同态.

2. 上 同 调 群

本节先定义以任意交换群 G 为系数群的上同调群，然后讨论整上同调群与整下同调群(以整数加群 J 为系数群的同调群)的关系.

在读本节时，需要熟悉前一节的内容.

上同调群 设 K 是 n 维的复形，$C_q(K)$ 是它的以整数为系数的 q 维链群(见第三章)，$q=0, 1, \cdots, n$, 而且 G 是任一交换群. 同态群 $\mathrm{Hom}(C_q(K), G)$ 叫作 K 的以 G 为值群的 q 维**上链群**，记作 $C^q(K; G)$:

$$C^q(K; G) = \mathrm{Hom}(C_q(K), G).$$

它的元素叫作 K 的以 G 为值群的 q 维**上链**. 为着区别起见，此后把 $C_q(K)$ 叫作**下链群**，把它的元素叫作**下链**. 注意，上链群的维数 q 写成肩标.

上链的定义值得再说明几句. 设 y^q 是任一 q 维的上链，因而它是一个同态:

$$y^q: C_q(K) \to G. \tag{1}$$

设 K 的有向单形的一个基本组是

$$\{s_i^q\},\ q=0, 1, \cdots, n, \quad i=1, 2, \cdots, \alpha_q,$$

而且设(1)中的同态 y^q 在 $s_i^q \in C_q(K)$ 处的值是 $g_i \in G$:

$$y^q: s_i^q \to g_i \in G, \quad i=1, 2, \cdots, \alpha_q. \tag{2}$$

根据命题 1.5, 给定了任意一组值 $\{g_i\}$, 式 (2) 就唯一地确定了式(1)所给出的一个上链 y^q. 而且这是通过以整数为系数的线性扩张来确定的；即如果 $x_q = \sum n_i s_i^q$, 则 y^q 在 x_q 处的值是 $y^q(x_q) = \sum n_i y^q(s_i^q) = \sum n_i g_i$, 或

$$y^q: x_q \to \sum n_i g_i \in G. \tag{3}$$

上链的定义式(1)可以叫作**函数观点的定义**. 从式(2)与第三章中下链的讨论，我们会想到，要使这个上链 y^q 也有一个以 G 的元素为系数的**线性组合的表示**:

$$y^q=\sum_{i=1}^{\alpha_q} g_i s_i^q. \tag{4}$$

为着达到这个目的，先对于 $i=1, 2, \cdots, \alpha_q$, 把由类似式(2)的下述式子

$$s_i^q \to g_i, \quad 而 \quad s_j^q \to 0, \quad j \neq i,$$

所确定的特别简单的上链，记作 y_i^q. 其次，命 y_i^q 的线性组合表示为 $g_i s_i^q$:

$$y_i^q = g_i s_i^q.$$

最后，根据上链群(作为同态群)的加法，$y^q=\sum y_i^q$; 从而得到表示式(4). 这时候 G 自然也叫作系数群.

现在，对于上一节开始时所引进的 Kronecker 积这一名称与记号，我们可以作如下的说明. 设 $y^q=\sum g_i s_i^q \in C^q(K; G)$, $x_q=\sum n_i s_i^q \in C_q(K)$. 从 Kronecker 积的定义与式(3)，有

$$\langle y^q, x_q\rangle = y^q(x_q) = \sum n_i g_i;$$

另一方面，根据上链的线性组合的表示，

$$\langle y^q, x_q\rangle = \langle \sum g_i s_i^q, \sum n_i s_i^q\rangle;$$

因而

$$\langle \sum g_i s_i^q, \sum n_i s_i^q\rangle = \sum n_i g_i.$$

这个式子就与欧几里得空间中两点的内积(参看 A § 2 中例 3)有相仿的形式; 因为如此，我们所以把 $y^q(x_q)$ 写作 $\langle y^q, x_q\rangle$, 并叫作 Kronecker 积. 因此在 $\langle y^q, x_q\rangle=0$ 时，我们还说 y^q 与 x_q 互相正交，并记作 $y^q \perp x_q$, 或 $x_q \perp y^q$.

上链的函数观点的定义与线性组合的表示各有其便利处. 在本书中我们将不加区别地运用这两种看法，但在说明几何意义时，

特别在 $G=J$ 时，我们常常侧重用后者.

2.1 定义 设 K 是复形，$C_q(K)$ 是 K 的整下链群，$C^q(K;G)$ 是 K 的、以 G 为值群的上链群. K 上的下边缘算子

$$\partial: C_q(K) \to C_{q-1}(K)$$

的对偶同态

$$\delta: C^{q-1}(K; G) \to C^q(K; G)$$

叫作 K 上的**上边缘算子** (δ 读作上戴尔塔)*). 对于任一 $q-1$ 维上链 y^{q-1}, δy^{q-1} 是一个 q 维上链，叫作 y^{q-1} 的**上边缘**. 算子 δ 当然同 ∂ 一样，是线性的.

上边缘 δy^{q-1} 的定义也值得再说明几句. 对于任意 $x_q \in C_q(K)$, δy^{q-1} 是由

$$\langle \delta y^{q-1}, x_q \rangle = \langle y^{q-1}, \partial x_q \rangle \tag{5}$$

定义的；换句话说，对于任意 q 维有向单形 s_j^q, δy^{q-1} 是由

$$\langle \delta y^{q-1}, s_j^q \rangle = \langle y^{q-1}, \partial s_j^q \rangle$$

与(以整数为系数的)线性扩张定义的. 再者，任意上链 y^{q-1} 都是上文所引进的特别简单的上链 y_i^{q-1} 的一个(以整数为系数的)线性组合，所以 δy^{q-1} 可以由 y^{q-1} 的线性组合的表示与

$$\langle \delta y_i^{q-1}, s_j^q \rangle = \langle y_i^{q-1}, \partial s_j^q \rangle$$

完全确定.

现在我们来从线性组合表示 $y_i^{q-1} = g_i s_i^{q-1}$, 求 δy_i^{q-1} 的线性组合表示. 设(参看 III § 2 中式(5), III § 6 中图 15)

$$\partial s_j^q = \sum_{k=1}^{\alpha_{q-1}} a_{jk}^{q-1} s_k^{q-1}, \quad a_{jk}^{q-1} = [s_j^q : s_k^{q-1}]. \tag{6}$$

从 $y_i^{q-1} = g_i s_i^{q-1}$ 的定义，有

---

*) 这里我们把 δ^{q-1} 简记作 δ. 当然也象前两章中讨论 ∂ 那样，引进 $\delta = \{\delta^q\}$.

$$\langle \delta y_i^{q-1}, s_j^q\rangle=\langle \delta(g_i s_i^{q-1}), s_j^q\rangle=\langle g_i s_i^{q-1},\ \partial s_j^q\rangle=\langle g_i s_i^{q-1},\ \sum_k a_{jk}^{q-1} s_k^{q-1}\rangle$$

$$=\sum_k a_{jk}^{q-1}\langle g_i s_i^{q-1},\ s_k^{q-1}\rangle=g_i a_{ji}^{q-1}.$$

因而得到线性组合表示:

$$\delta y_i^{q-1}=\delta(g_i s_i^{q-1})=g_i\sum_{j=1}^{\alpha_q} a_{ji}^{q-1} s_j^q. \tag{7}$$

以上的讨论是关于以任意交换群 G 为系数群的上链的上边缘的. 这时候, 上链群 $C^q(K;\ G)$ 不必是自由群; 因而式(7)与证法虽然与命题1.7的结论与证法有相似之处, 但并未利用命题1.7. 现在考虑 $G=J$ 这特别的而又十分重要的情形. 这时候, 根据命题1.6, 整上链群 $C^q(K)=C^q(K;\ J)$ 是自由群. 复形 K 的 q 维的有向单形组

$$s_1^q,\ s_2^q,\ \cdots,\ s_{\alpha_q}^q$$

是 $C_q(K)$ 的一个基 X; 但作为整上链时, 又恰是 $C_q(K)$ 的这个基 X 的对偶基 Ξ, 而且 X 中的 s_i^q 与 Ξ 中的 s_i^q 是对应元素. 然后根据上面式(7)的证明或命题1.7, 得到 $G=J$ 时的重要公式:

$$\delta s_i^{q-1}=\sum_{j=1}^{\alpha_q} a_{ji}^{q-1} s_j^q. \tag{8}$$

下面的两个图说明, 在 $G=J$ 时, 下边缘 ∂ 的式(6)与上边缘的式(8)间的关系.

$$\begin{array}{ccc}
s_j^q\in C_q(K) & \xrightarrow{\ \partial\ } & C_{q-1}(K)\\
\| & & \|\\
C^q(K) & \xleftarrow{\ \delta\ } & C^{q-1}(K)\ni s_i^{q-1}\\
\Downarrow & & \Downarrow\\
\langle \delta s_i^{q-1},\ s_j^q\rangle & = & \langle s_i^{q-1},\ \partial s_j^q\rangle=a_{ji}^{q-1}
\end{array}$$

图　1

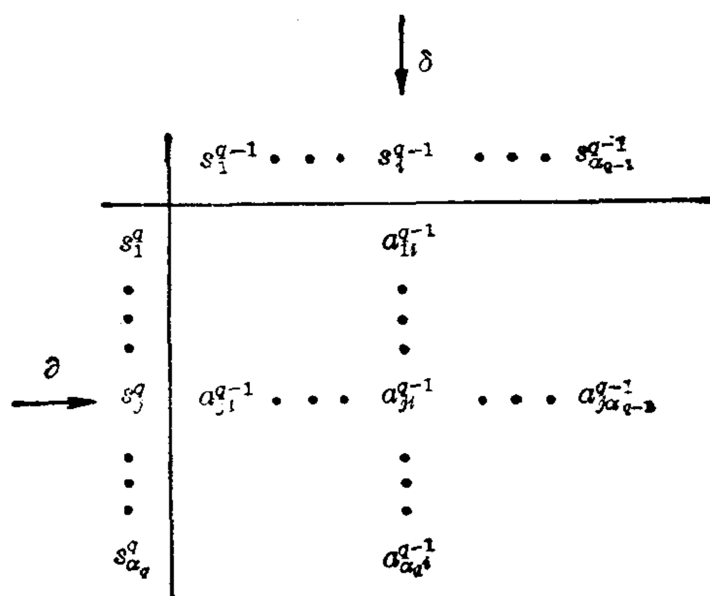


图 2

例 2.1 设复形 K 是例 III.4.1 中的平环(图 III.7). 建议读者从公式 $\langle \delta s_i^{q-1}, s_j^q\rangle = \langle s_i^{q-1}, \partial s_j^q\rangle$ 出发, 求出下列整上链的上边缘:

$$\delta a^1, \quad \delta(a^5 a^1), \quad \delta(a^1 a^2 a^5).$$

2.2 定理 $\delta\delta = 0$.

证 明 用推论 1.2 与 1.4. ▌

如同从定理 III.2.3 出发, 我们定义了下同调群, 现在我们从本定理出发来定义上同调群. 如果 K 上的上链 $y^q(\in C^q(K; G))$ 的上边缘是零, y^q 就叫作一个**上闭链**. q 维的上闭链全体组成 $C^q(K; G)$ 的一个子群, 叫作 K 的 q 维**上闭链群**, 记作 $Z^q(K; G)$. 因为复形 K 是 n 维的, 特别有 $Z^n(K; G) = C^n(K; G)$. 如果 y^q 是一个 $q-1$ 维上链的上边缘, 它就叫作一个**上边缘链**. q 维上边缘链全体组成 $C^q(K; G)$ 的一个子群, 叫作 K 的 q 维**上边缘链群**, 记作 $B^q(K; G)$. 显然有 $B^0(K; G) = 0$. 因为定理 2.2, $B^q(K; G) \subset Z^q(K; G)$. 商群

$$Z^q(K; G)/B^q(K; G), \quad q = 0, 1, \cdots, n,$$

叫作 K 的 q 维**上同调群**, 记作

$$H^q(K;\ G).$$

$Z^q(K;\ G)$ 中的模 $B^q(K;\ G)$ 等价类叫作**上同调类**. 如果两个上闭链 z_1^q 与 z_2^q 属于同一个上同调类，就说它们互相**上同调**，仍记作 $z_1^q \sim z_2^q$ 或 $z_2^q \sim z_1^q$. 显然还有

$$Z^q(K;\ G) = \delta^q \text{ 核},\ B^q(K;\ G) = \delta^{q-1} \text{ 象}.$$

例 2.2 设连通的复形 K 共具有 α_0 个顶点 a^i, $i=1, 2, \cdots, \alpha_0$. 则零维的整上链

$$e^0 = \sum_{i=1}^{\alpha_0} a^i$$

是 K 上的一个上闭链，而且零维的整上同调群 $H^0(K) \approx J$.

事实上，对于 K 的任意一个一维有向单形 s^1,

$$\langle \delta e^0,\ s^1 \rangle = \langle e^0,\ \partial s^1 \rangle = 0.$$

因而在 δe^0 的线性组合的表示里，s^1 的系数是 0; 即 $\delta e^0 = 0$, 或 e^0 是上闭链.

然后容易看出 $H^0(K) \approx J$, 以 e^0 为生成元.

对于任意的复形 K, 与任意系数群 G, $H^0(K;G)$ 是什么？（复习题.）

例 2.3 设 K 是 n 维的闭假流形(定义 III.4.1). 它的 n 维的整上同调群 $H^n(K)$ 是 J 或 J_2, 按照它能否定向.

设 K 能定向，而且 s_1^n, s_2^n 是它的任意两个协合定向的 n 维有向单形. 如果它们有一个公共的 $n-1$ 维面，则根据协合定向的定义与闭假流形的性质 2)，它们是上同调的两个上链；如果它们无公共的 $n-1$ 维面，则根据协合定向的定义与闭假流形的性质 3)，得到同样的结论. 于是 ks_1^n, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 恰代表 K 上的所有整上同调类，即 $H^n(K) \approx J$.

设 K 不能定向，而且 $\{s_i^n\}$, $i=1, 2, \cdots, \alpha_n$, 是它的全体任意定向了的 n 维单形. 首先，因为 K 不能定向，存在由 $\{s_i^n\}$ 中若干 n 维有向单形所组成的一条 n 维闭折线(参看定义 III.4.1 后)，不妨设是以 s_1^n 为起点的闭折线，使得上链 s_1^n 的两倍

$$2s_1^n \sim 0.$$

其次，因为闭假流形的性质 3)，$s_i^n \sim \pm s_1^n$, $i \neq 1$. 最后，我们说，上链

$$s_1^n \not\sim 0.$$

事实上，因为闭假流形的性质 2)，n 维边缘链的线性组合表示中的系数和，必须是 $\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. 于是在 K 不能定向时，$H^n(K) \approx J_2$.

如果 K 是例 III 4.4 中的射影平面的单纯剖分，是否

$$H^2(K)\approx\mathrm{Hom}(H_2(K),\ J)?$$

(复习题.)

$H^n(K;G)$ 是什么？(复习题.)

例 2.4 环面 T (图 3) 的整上同调群. 我们即将说明的方法，可以说是类似于例 III.4.2 中的方法.

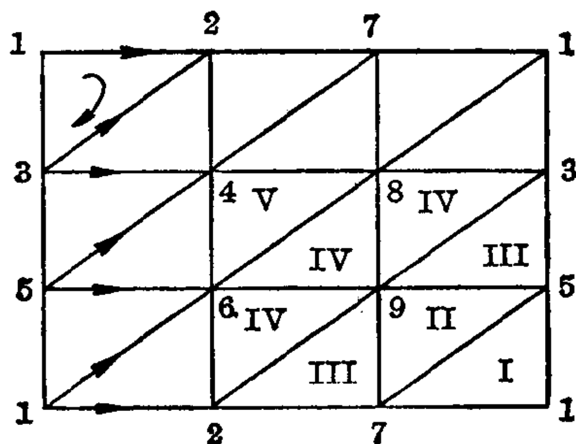


图 3

为简单起见，顶点用数字表示. 从例 2.2 与例 2.3，分别知道 $H^0(T)\approx J$ 以 e^0 的上同调类为生成元，$H^2(T)\approx J$ 以二维有向单形 123 的上同调类为生成元.

现在求 $H^1(T)$. 首先，容易验证

$$z_1^1=12-23+34-45+56-61,$$

$$z_2^1=13-32+24-47+78-81$$

是两个一维上闭链. 其次，我们要证明 $H^1(T)$ 是以 $\bar{z}_1^1$ 与 $\bar{z}_2^1$ 为生成元的自由群，即要证明下列两事实.

(i) 任一一维整上闭链 $z^1\sim g_1z_1^1+g_2z_2^1$，$g_1$ 与 g_2 是整数. 如果 z^1 含有棱 71，则 z^1 加上 $\delta 7$ 的适当倍数后，不再含有 71. 因而可设 z^1 不含有 71. 这时候，因为 $\delta z^1=0$，特别地，因为 δz^1 不含有二维有向单形 751，z^1 必含有棱 75 与 15 的相同倍数，所以 z^1 加上 $\delta 5$ 的适当倍数后，不再含有 75 与 15，同时仍旧不含有 71. 因而又可设 z^1 不含有右下角那里的、三角形 751 (即三角形 I) 上的三条棱. 这时候，因为 z^1 不含有 75，以及 δz^1 不含有二维有向单形 795，同理可知，z^1 加上 $\delta 9$ 的适当倍数后，不再含有 59 与 79；同时仍旧不含 751 上的三条棱. 因而又可设 z^1 不含有右下角那里的、矩形 7951 (三

角形 I, II 组成的)上的五条棱. 同理, 这时候的 z^1, 加上 $\delta 3$ 的适当的倍数与 $\delta 2$ 的适当倍数后, 不但仍旧不含有 7951 上的五条棱, 还不再含有棱 93, 53, 92, 72. 因而又可设 z^1 不含有右下角那里的大三角形 231 (三角形 I, II, III 组成的)上的九条棱. 同理, 通过加上 $\delta 6$ 的适当倍数与 $\delta 8$ 的适当倍数后, 不但仍旧不含有大三角形 231 上的九条棱, 还不再含有棱 26, 96, 38, 98; 而且还明显地不再含有棱 68. 因而又可设 z^1 不含有右下角那里的、大五边形 26831 (三角形 I, II, III, IV 组成的)上的十四条棱. 同理, 这时候的 z^1, 加上 $\delta 4$ 的适当倍数后, 不再含有右下角那里的、大矩形 2431 (三角形 I, II, III, IV, V 组成的)上的十六条棱. (为什么不能再进一步简化, 建议读者说明.)

T 上共有二十七条棱, 其中十六条在大矩形 2431 上, 另十一条在 z_1^1 与 z_2^1 中出现. 以上的作法说明, T 上的任一一维整上闭链 z^1, 必上同调于这样的一个整上闭链 z_3^1, 其中出现的棱只可能是在 z_1^1 与 z_2^1 中出现的棱. 现在剩下要证明的是: 这样的 $z_3^1=g_1z_1^1+g_2z_2^1$. 事实上, z_1^1 与 z_2^1 恰有一条公共棱 23; 如果命 $z_1^1=-23+c_1^1$, $z_2^1=-32+c_2^1$, 则 c_1^1 与 c_2^1 无公共棱. 因为 z_3^1 是上闭链, 它不能只含有一条棱 23; 设它含有 z_1^1 的部分 c_1^1 中的一条棱. 由于 z_3^1 是上闭链以及不含有 2431 上的棱, 它必含有 z_1^1 的部分 c_1^1 的一个倍数, 设这倍数是 g_1. 然后 $z_3^1-g_1z_1^1$ 仍是上闭链, 而且它的棱只可能是 z_2^1 中的棱. 同理, $z_3^1-g_1z_1^1$ 必是 z_2^1 的一个倍数. 于是 $z_3^1=g_1z_1^1+g_2z_2^1$.

(ii) $g_1z_1^1+g_2z_2^1\sim 0\Rightarrow g_1=g_2=0$. 这里的假设说: 存在一个零维上链 c^0, 使得 $\delta c^0=g_1z_1^1+g_2z_2^1$. 由于 z_1^1 与 z_2^1 不含有大矩形 2431 上的十六条棱, 这十六条棱的每一条的两个顶点必以相同的倍数在 c^0 中出现; 于是 $c^0=ge^0$, 因而

$$g_1z_1^1+g_2z_2^1=g\delta e^0=0.$$

因为 c_1^1 与 c_2^1 不含有公共棱, 所以必须 $g_1=g_2=0$.

例 2.5　设 $\hat{K}$ 是以点 a 为顶、以 n 维复形 K 为底的锥形 (例 III.4.7). 根据例 2.2, $H^0(\hat{K})\approx J$. 我们说,

$$H^q(\hat{K})=0,\quad q\geqslant 1.$$

证　明　设 $\{t_i^q\}$ 是 K 的有向单形的一个基本组, $q=0, 1, \cdots, n$, $i=1, 2, \cdots, \alpha_q$. 则 $\{a, t_i^q, at_i^q\}$ 是 $\hat{K}$ 的一个基本组. 明显地,

$$\left.\begin{aligned}&\partial(at_i^0)=t_i^0-a &&\text{在 } \hat{K} \text{ 上},\\ &\partial(at_i^q)=t_i^q-a\partial t_i^q &&\text{在 } \hat{K} \text{ 上},\ q\geqslant 1.\end{aligned}\right\}\qquad (9)$$

从式(9)的第二式以及 $q=n$, 我们可以立刻得出 $H^{n+1}(\hat{K})=0$. 事实上,

$Z^{n+1}(\hat{K})=C^{n+1}(\hat{K})$. 另一方面，因为 $\hat{K}$ 的 $n+1$ 维有向单形只是 at_i^n，而且因为，根据式(9)第二式以及 $q=n$，每一个 $at_i^n=\delta t_i^n$ 在 $\hat{K}$ 上，所以 $B^{n+1}(\hat{K})=C^{n+1}(\hat{K})$. 于是 $H^{n+1}(\hat{K})=0$.

对于一般的 $q\geqslant1$，我们需要证明的是：

$$Z^q(\hat{K})=B^q(\hat{K});$$

换句话说，也就是：对于 $\hat{K}$ 上的任一上链 x^q，$q\geqslant1$，$\delta x^q=0\Rightarrow x^q\sim0$.

首先，$\hat{K}$ 上的任一上链 x^q 的线性组合表示可以写成：

$$x^q=ay^{q-1}+y^q,\quad q\geqslant1, \tag{10}$$

这里的 y^{q-1} 与 y^q 是 K 上的上链. 因而想到应该进行考虑在 $\hat{K}$ 上的 $\delta(ay^{q-1})$ 与 δy^q.

其次，把 K 上的上边缘算子记作 δ_K，我们说，如果对于 K 上的有向单形 t_i^{q-1}, t_i^q,

$$\delta(at_i^{q-1})=-a\delta_K t_i^{q-1},\quad \delta t_i^q=at_i^q+\delta_K t_i^q,\quad q\geqslant1, \tag{11}$$

成立（注意式(11)有明显的几何意义！），因而对于 K 上的上链 y^{q-1}, y^q,

$$\delta(ay^{q-1})=-a\delta_K y^{q-1},\quad \delta y^q=ay^q+\delta_K y^q,\quad q\geqslant1, \tag{12}$$

成立，则 $\delta x^q=0\Rightarrow x^q=0$. 事实上，$\delta x^q=0$ 这假设以及式(10)与式(12)给出

$$0=\delta x^q=\delta(ay^{q-1})+\delta y^q=-a\delta_K y^{q-1}+ay^q+\delta_K y^q.$$

这蕴涵

$$y^q=\delta_K y^{q-1},\quad \delta_K y^q=0.$$

式(10)与这里的第一个方程，以及式(12)中的第二个方程给出

$$x^q=ay^{q-1}+\delta_K y^{q-1}=\delta y^{q-1},$$

即所求证的结论 $x^q\sim0$.

最后，我们来证明式(11). 为着证明式(11)，我们先指出下列明显的式子：

$$\left.\begin{array}{l}\langle at_i^{q-1},\ t_j^q\rangle=0,\quad \langle t_i^q,\ at_j^{q-1}\rangle=0,\\ \langle at_i^q,\ at_j^q\rangle=\langle t_i^q,\ t_j^q\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\end{array}\right\} \tag{13}$$

这里的四个 Kronecker 积中的第一与第二因子，当然分别是上链与下链，前三个积是在 $\hat{K}$ 上的，而最后一个积是在 K 上的.

因为式(11)的第一方程中的 $\delta(at_i^{q-1})$，只能是 $\hat{K}$ 的、以 a 为一个顶点的有向单形 at_i^q 的线性组合，所以考虑 $\langle\delta(at_i^{q-1}),\ at_j^q\rangle$. 从式(9)，式(13)以及 δ 与 δ_K 的定义，有

$$\langle\delta(at_i^{q-1}),\ at_j^q\rangle=\langle at_i^{q-1},\ t_j^q-a\partial t_j^q\rangle=\langle at_i^{q-1},\ -a\partial t_j^q\rangle$$
$$=\langle t_i^{q-1},\ -\partial t_j^q\rangle=\langle\delta_K t_i^{q-1},\ -t_j^q\rangle=\langle -a\delta_K t_i^{q-1},\ at_j^q\rangle;$$

于是得到式(11)的第一方程.

式(11)的第二方程中的 δt_i^q 的线性组合表示，既有 $\hat{K}$ 的、以 a 为一个顶点的单形，又有 $\hat{K}$ 的、不以 a 为一个顶点的单形. 所以我们计算下面的两个 Kronecker 积:

$$\langle\delta t_i^q,\ at_j^q\rangle=\langle t_i^q,\ \partial(at_j^q)\rangle=\langle t_i^q,\ t_j^q-a\partial t_j^q\rangle=\langle t_i^q,\ t_j^q\rangle=\langle at_i^q,\ at_j^q\rangle;$$
$$\langle\delta t_i^q,\ t_j^{q+1}\rangle=\langle t_i^q,\ \partial t_j^{q+1}\rangle=\langle\delta_K t_i^q,\ t_j^{q+1}\rangle.$$

这两个式子立刻给出式(11)的第二方程.】

以上三个例子中的大部分结果都是后面定理 2.4 的推论. 但为着说明如何直接计算上同调群，这三个例子是值得介绍的.

习 题

1. 试直接(不应用本节后面定理 2.4) 从上边缘运算的定义，计算下列五个复形的整上同调群. 1)例 III. 4.1 中的平环，2) 二维球的八面形剖分，3) $S^1\vee S^2\vee S^1$ 或 $\dot{s}^2\vee\dot{s}^3\vee\dot{s}^2$，4) 例 III. 4.2 中的 Möbius 带，5) 例 III. 4.4 中的射影平面.

例 2.4，例 2.5 与本习题中的复形，包含了 III§4 中的所有简单复形.

2. 设 x_q 与 x'_q 是 K 上的两个整下链. 如果，对于每一个上链 $y^q\in C^q(K;G)$，$\langle y^q,\ x_q\rangle=\langle y^q,\ x'_q\rangle$，则 $x_q=x'_q$.

3. 设 $z^q\in Z^q(K;G)$，$z_q\in Z_q(K)$. 试证：如果 z^q 是上边缘或 z_q 是下边缘，则 $\langle z^q,\ z_q\rangle=0$.

试讨论如何定义 $\langle\bar{z}^q,\ \bar{z}_q\rangle$，对于 $\bar{z}^q\in H^q(K;G)$，$\bar{z}_q\in H_q(K)$. 由于这个定义，我们说，Kronecker 积把 $H^q(K;G)$ 与 $H_q(K)$ 配对到 G.

4. 试证：1) 一个上链 y^q 是上闭链，当而且只当 $\langle y^q,\ x_q\rangle=0$，对于每一个整下边缘 x_q；2) 一个整下链 x_q 是下闭链，当而且只当 $\langle y^q,\ x_q\rangle=0$，对于每一个上边缘 y^q.

5. 试简单地说明 $\mathrm{Hom}(C_q(K;\ J_2),\ J_2)$ 是否 $C^q(K;J_2)$? 从它是否也能得到 $H^q(K;J_2)$? 这里 J_2 是整数模 2 的加群.

如果 G_1，G_2 是任意交换群，从 $\mathrm{Hom}(C_q(K;\ G_1),G_2)$出发来定义 K 的一种上同调群有何困难?

上下同调群的关系 以上我们定义了复形 K 的上同调群，而且计算了一些复形的上同调群. 在比较第三章中相应的讨论之后，自然会产生这样的问题：同一个复形 K 的下同调群与上同调群究竟有什么关系？现在我们来回答这个问题，但只限于以整数为系数的上下同调群.

沿用前面定义上链的上边缘时所用的记号. 在 $G=J$ 时，我们已经知道：K 的 q 维有向单形 $\{s_i^q\}$，既可以看作 K 的整下链，也可以看作 K 的整上链；K 的下链群 $C_q(K)$ 的自然基 $\{s_i^q\}$ 的对偶基就是作为上链的 $\{s_i^q\}$. 我们也把 $\{s_i^q\}$ 叫作 $C^q(K)$ 的自然基. 因为自然基 $\{s_i^q\}$ 这种自相对偶的性质，从命题 1.7 我们得到了(图 2)

$$\partial s_i^{q+1}=\sum a_{ij}^q s_j^q, \tag{6}$$

$$\delta s_i^q=\sum a_{ji}^q s_j^{q+1}. \tag{8}$$

现在不用 $C_q(K)$ 的自然基，而从 $C_q(K)$ 的典型基出发，就很容易得到下述两个定理，其中后一个定理就是上面提出的问题的答案.

2.3 定理 设 K 是 n 维复形. 沿用定理 III.6.2 中关于 K 的记号 α_q, β_q, R_q, τ_q, $\theta_q^{j_q}$, $q=0, 1, \cdots, n$, $j_q=1, 2, \cdots, \tau_q$. 则对于每一固定的 q，整上链群 $C^q(K)$ 各有由下列五种上链组成的一个基：

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{i_{q-1}}^q, && i_{q-1}=1, 2, \cdots, \beta_{q-1}-\tau_{q-1},\\
&\bar{b}_{j_{q-1}}^q, && j_{q-1}=1, 2, \cdots, \tau_{q-1},\\
&\bar{c}_{k_q}^q, && k_q=1, 2, \cdots, R_q,\\
&\bar{d}_{i_q}^q, && i_q=1, 2, \cdots, \beta_q-\tau_q,\\
&\bar{e}_{j_q}^q, && j_q=1, 2, \cdots, \tau_q,
\end{aligned}$$

(其中无 $\bar{a}_{i_{-1}}^0$, $\bar{b}_{j_{-1}}^0$, $\bar{e}_{j_0}^0$, 无 $\bar{b}_{j_0}^1$, 无 $\bar{d}_{i_n}^n$, $\bar{e}_{j_n}^n$)，而且上边缘同态由下列方程决定：

$$\delta \bar{a}^q_{i_{q-1}}=0, \quad \delta \bar{b}^q_{j_{q-1}}=0, \quad \delta \bar{c}^q_{k_q}=0,$$
$$\delta \bar{d}^q_{i_q}=\bar{a}^{q+1}_{i_q}, \quad \delta \bar{e}^q_j=\theta^{j_q}_q \bar{b}^{q+1}_{j_q}.$$

这些基叫作上链群的一组典型基．图 4 形象地说明本定理的结论(参看 III §6 习题 3 所求作的图)．

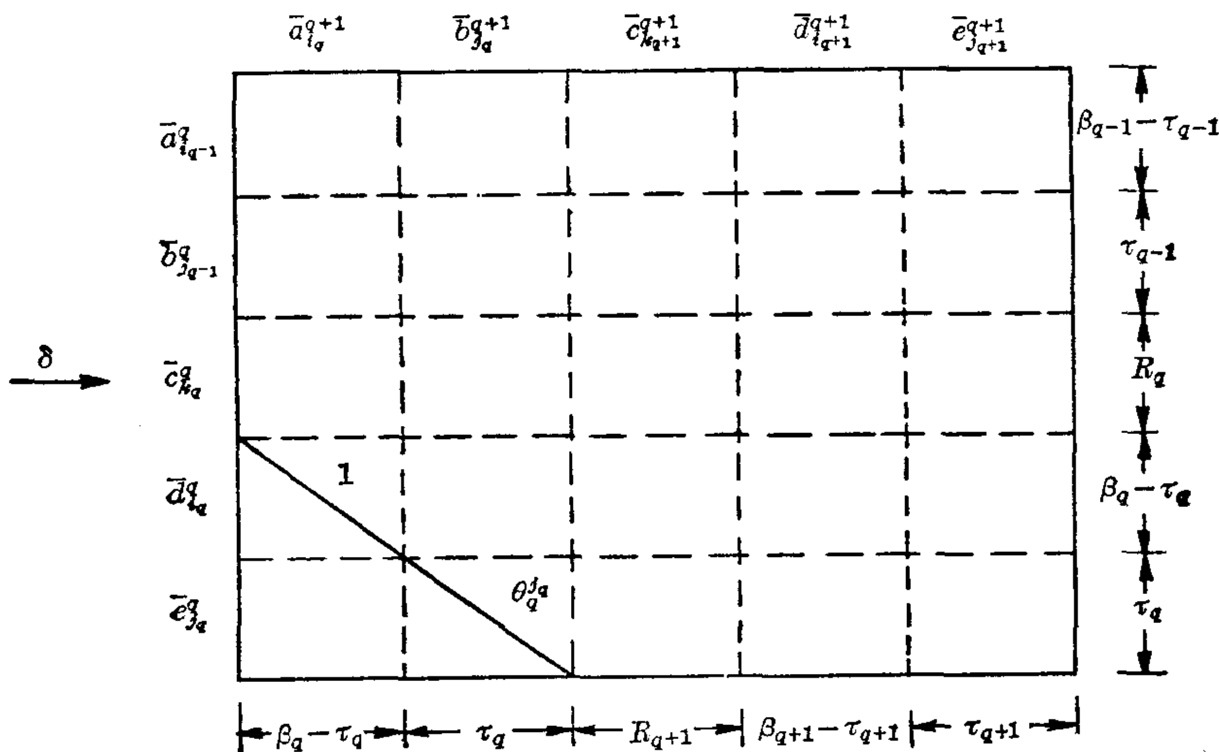


图 4

证　明　根据命题 1.6，定理 III.6.2 中的 $C_q(K)$ 的典型基

$$\{a^{i_q}_q,\ b^{j_q}_q,\ c^{k_q}_q,\ d^{i_{q-1}}_q,\ e^{j_{q-1}}_q\},$$

对于每一个固定的 q，有一个对偶基($C^q(K)$的基)；我们把这对偶基记作

$$\{\bar{d}^q_{i_q},\ \bar{e}^q_{j_q},\ \bar{c}^q_{k_q},\ \bar{a}^q_{i_{q-1}},\ \bar{b}^q_{j_{q-1}}\}.$$

根据命题 1.7，利用对偶基时，$\delta: C^q(K)\to C^{q+1}(K)$ 的方程的矩阵是图 5 中所给出的．把对偶基中的元素的次序作明显的改变，就从图 5 得到图 4．▌

从本定理，立刻知道

$$Z^q(K)=\text{以}\{\bar{a}^q_{i_{q-1}},\ \bar{b}^q_{j_{q-1}},\ \bar{c}^q_{k_q}\}\text{为基的自由群},$$

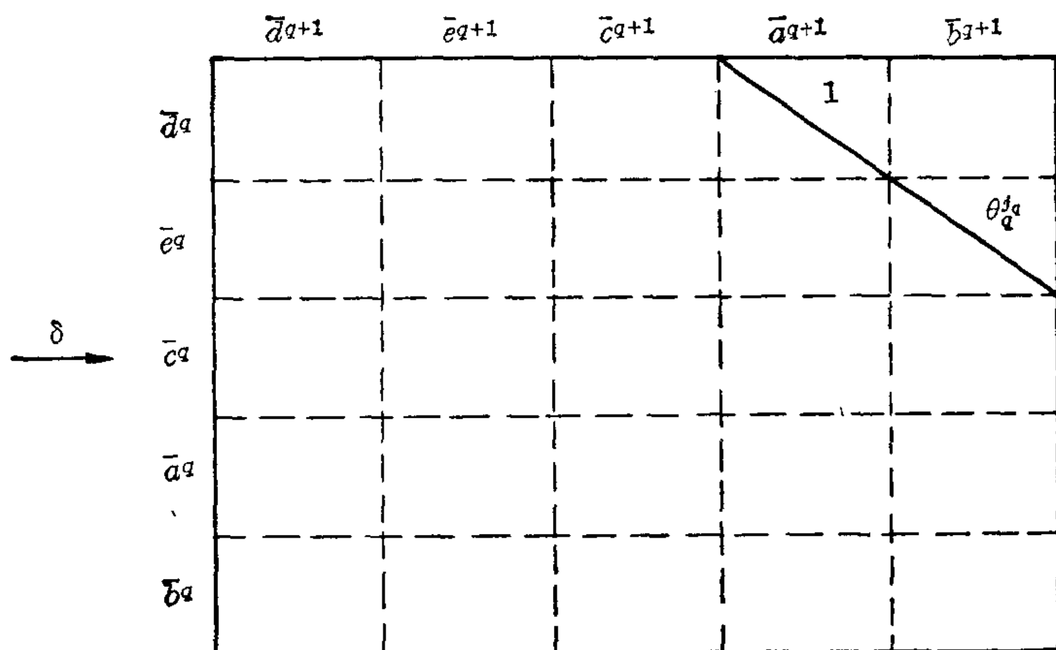


图 5

$$B^q(K)=\text{以}\{\bar{a}^q_{i_{q-1}},\ \theta^{j_{q-1}}_{q-1}\bar{b}^q_{j_{q-1}}\}\text{为基的自由群},$$

因而

$$H^q(K)=\text{以}\ \{\bar{c}^q_{k_q}\}\ \text{为基的自由群}+\sum\ \text{以}\bar{b}^q_{j_{q-1}}\ \text{为生成元的}$$
$$\theta^{q-1}_{j_{q-1}}\ \text{阶循环群}.$$

然后得到下述定理:

2.4 定理 如果把 $H^q(K)$ 的秩记作 R^q, 而且把 $H_q(K)$ 与 $H^q(K)$ 的挠子群分别记作 $T_q(K)$ 与 $T^q(K)$, 则

$$R^q=R_q,\ T^q(K)=T_{q-1}(K),\quad q=0,\ 1,\ \cdots,\ n,$$

这里把 $T_{-1}(K)$ 理解为零群. ▌

交换群 G 与 K 的整下同调群,不仅完全确定 K 的以 G 为系数群的下同调群(参看 III § 2 的末尾),而且也完全确定 K 的以 G 为系数的上同调群. 这些事实本书中都不证.

单纯映射与链映射

2.5 命题 设 K 与 L 是复形. 设 $f=\{f_q\}$ 是链映射(例如由单纯映射 $f:K\to L$ 所诱导出来的), 而且 f 的对偶同态是

$f^{\cdot}=\{f^q\}$,

$$f^q: C^q(L; G)\to C^q(K; G).$$

则 $f^{\cdot}$ 与上边缘算子 δ 交换:

$$f^q\delta=\delta f^{q-1}, \tag{14}$$

而且诱导出上同调群之间的同态 $f^*=\{f^{q*}\}$,

$$f^{q*}: H^q(L; G)\to H^q(K; G).$$

证 明 用推论1.3来证明式(14). 然后如同证明命题IV.1.2那样,得到末一结论. ▌

这时候,对于 $\bar{z}^q\in H^q(L; G)$, 还有

$$f^{q*}(\bar{z}^q)=(f^q z^q)^*; \tag{15}$$

而且如果 $\underline{f}: K\to L$, $\underline{h}: L\to M$ 都是单纯映射,则

$$(hf)^*=f^*h^* \tag{16}$$

(命题1.2). 注意式(16)右端中 f^* 在前, h^* 在后.

满足式(14)的任意同态 $f^{\cdot}=\{f^q\}$ 此后也叫作**链映射**. 在必要时,将区别**下链映射**与**上链映射**.

例 2.6 设命题2.5中的 K 与 L 的 q 维有向单形分别是 s_i^q 与 t_j^q, 而且 $f=\{f_q\}$ 是单纯链映射. 因而,在 f_q 的下列方程

$$f_q(s_i^q)=\sum_j n_{ij}t_j^q$$

中, 对于固定的 i, 至多一个 n_{ij} 是 $+1$ 或 -1, 而其他的都是零. 根据命题1.7, 如果 $G=J$,

$$f^q(t_j^q)=\sum_i n_{ij}s_i^q,$$

这个式子的右边恰是 t_j^q 的、在 f_q 下的原象 $f_q^{-1}(t_j^q)$ 的和. 这给出单纯链映射 f 的对偶同态 $f^{\cdot}$ 的几何解释. 建议读者讨论一般系数群的情形. (复习题.)

注意, 这里并未用 f_q 是链映射这个性质.

现在来引进链同伦 $D=\{D_q\}$ (定义IV.1.4)的对偶. 设 f, $h: C_q(K)\to C_q(L)$ 是链同伦的两个下链映射,即存在一序列的同态 $D=\{D_q\}$,

$$D_q: C_q(K) \to C_{q+1}(L),$$

使得

$$\partial_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q = h_q - f_q.$$

记 D_q 的对偶同态为

$$D^{q+1}: C^{q+1}(L; G) \to C^q(K; G),$$

而且记 $D^{\cdot} = \{D^q\}$.

2.6 命题 如果下链映射 $f, h: C_q(K) \to C_q(L)$ 是链同伦的: $D: f \simeq h$, 则它们相应的上链映射 $f^{\cdot}, h^{\cdot}: C^q(L; G) \to C^q(K; G)$ 满足下式:

$$\delta^{q-1} D^q + D^{q+1} \delta^q = h^q - f^q,$$

因而它们诱导出上同调群之间的同一个同态

$$f^* = h^*: H^q(L; G) \to H^q(K; G).$$

因而我们也说, $f^{\cdot}, h^{\cdot}$ 是链同伦的: $D^{\cdot}: f^{\cdot} \simeq h^{\cdot}$.

证 明 设 y^q 是 L 上的任一 q 维整上链. 对于 K 的任一 q 维有向单形 s^q, 作为下链,

$$\begin{aligned}\langle \delta^{q-1} D^q y^q, s^q \rangle &= \langle y^q, D_{q-1} \partial_q s^q \rangle = \langle y^q, (h_q - f_q - \partial_{q+1} D_q) s^q \rangle \\ &= \langle (h^q - f^q - D^{q+1} \delta^q) y^q, s^q \rangle.\end{aligned}$$

然后作线性扩张.

第二个结论的证明如同命题 IV.1.4 的. ▌

上同调群的不变性 现在我们能够在下同调群不变性证明的基础上, 很容易地证明上同调群的不变性. 我们只限于整上同调群. 首先, 考虑重分不变性. 关于标准链映射 $\theta\pi: C_q(SdK) \to C_q(K)$ 与重分链映射 $Sd: C_q(K) \to C_q(SdK)$, 引理 IV.3.9 与 IV.4.2 分别给出

$$\pi Sd = 1, \quad Sd\pi \simeq 1.$$

从命题 1.1, 有 π, Sd, 恒同链映射 1 的对偶同态 $\pi^{\cdot}$, $Sd^{\cdot}$, $1^{\cdot}$, 而且明显地, $1^{\cdot}$ 仍是恒同链映射, 所以可记作 1. 根据命题 1.2 与 1.3, 或根据命题 1.2 与 2.6, 分别有

$$Sd^{\cdot} \pi^{\cdot} = 1, \quad \pi^{\cdot} Sd^{\cdot} \simeq 1.$$

于是，如同证明定理 IV.4.3 时一样，得到互逆的同构：

$$Sd^*:H^q(SdK)\approx H^q(K),\quad \pi^*:H^q(K)\approx H^q(SdK).$$

其次，我们来证明上同调群的拓扑不变性，而不利用伦型不变性. 沿用定理 IV.5.10 中的记号. 设 $\varphi:K\to L$ 是同胚. 第一步，设 $\varphi:K\to L$, $\varphi^{-1}:Sd^{(m)}L\to K$ 都具有星形性质. 在证明定理 IV.5.10 的第一步中，它们有单纯逼近 $\underline{f}$ 与 $\underline{h}$，分别诱导出单纯链映射 $f:C_q(K)\to C_q(L)$, $h:C_q(Sd^{(m)}L)\to C_q(K)$；因为 $\underline{f}\underline{h}$ 与 $\underline{\pi}^{(m)}$（定理 IV.5.10 的证明中）都是 $\varphi^{-1}\varphi=1:Sd^{(m)}L\to L$ 的单纯逼近，所以它们所诱导出的链映射 fh, $\pi^{(m)}$: $C_q(Sd^{(m)}L)\to C_q(L)$，诱导出相同的星形同态 $f_*h_*=\pi_*^{(m)}$；然后从 $\pi_*^{(m)}$ 是同构（重分不变性定理 IV.4.3），推出 f_* 是同构. 现在对于上同调群，从命题 1.1，有对偶同态

$$h^{\cdot}f^{\cdot},\ \pi^{(m)\cdot}:C^q(L)\to C^q(Sd^{(m)}L).$$

由于 $\underline{f}\underline{h}$ 与 $\underline{\pi}^{(m)}$ 都是恒同映射 $\varphi^{-1}\varphi=1:Sd^{(m)}L\to L$ 的单纯逼近，根据命题 IV.5.9(iii)，例 IV.4.2 以及定理 IV.4.1，它们诱导出链同伦的下链映射 fh 与 $\pi^{(m)}$；然后根据命题 2.6，对偶的上链映射 $h^{\cdot}f^{\cdot}$ 与 $\pi^{(m)\cdot}$ 也链同伦；因而 $h^*f^*=\pi^{(m)*}$. 从 $\pi^{(m)*}$ 是同构（上同调群的重分不变性），同样地推出 $f^*:H^q(L)\to H^q(K)$ 是同构.

第二步，设不是 $\varphi:K\to L$，而是 $\varphi:Sd^{(r)}K\to L$，具有星形性质，而且 $\underline{f}^{(r)}$ 是 $\varphi:Sd^{(r)}K\to L$ 的一个单纯逼近. 根据上面第一步的结论，$f^{(r)*}$: $H^q(L)\to H^q(Sd^{(r)}K)$ 是同构. 于是 $Sd^{(r)*}f^{(r)*}:H^q(L)\to H^q(K)$ 是同构.

整上同调群的伦型不变性也可在 IV §6 的基础上证明. 建议读者，在总复习时，自己考虑补证.

3. 相对同调群·切除定理

设 K 是一个复形，L 是它的一个子复形. 本节中将引进 $K-L$ 的下同调群与上同调群，也都叫作相对于 L 的、K 的相对同调群. 如果 L 是空的，这样定义的相对同调群就是 K 的下同调群与上同调群. K 的上下同调群所以也叫作 K 的**绝对同调群**.

如果 L 不是空的，$K-L$ 叫作 K 的**开子复形**（因而前此所定义的子复形也有时叫作**闭子复形**），但注意开子复形不是复形. 所

以 $K-L$ 的同调群的讨论已初步跨出复形的范围；并反映出空间 $|K|-|L|$ 的一些几何性质.

本节对于相对同调群，还证明一个重要定理——切除定理.

相对同调群与绝对同调群的关系，以及相对同调群与切除定理的应用，见本章的以后诸节.

相对下同调群 我们只限于定义以整数为系数的相对下同调群. 读者将毫无困难地看出，我们的定义能立即推广到以任意交换群 G 为系数群的一般情形.

设 K 是一个复形，L 是它的一个子复形. 因为同 K 一样，$K-L$ 是单形的集合，现在也选定 $K-L$ 的有向单形的一个基本组，把 $K-L$ 的 q 维有向单形的每一个线性组合(以整数为系数的)叫作 $K-L$ 上的一个 q 维(整)**下链**，得到 $K-L$ 的 q 维(整)**下链群**，记作 $C_q(K-L)$.

如何定义 $K-L$ 上的下边缘算子呢？我们首先遇到的一个事实是：虽然 $K-L$ 的任一个 q 维有向单形 s^q 也是 K 的一个 q 维有向单形，但是 s^q 的在 K 上的下边缘 ∂s^q 不必是在 $K-L$ 上的一个 $q-1$ 维下链；换句话说，虽然 $C_q(K-L)\subset C_q(K)$，但 $\partial C_q(K-L)$ 不必 $\subset C_{q-1}(K-L)$. 因此我们进行如下. 由于 K 分为两部分 L 与 $K-L$，K 上的任一 q 维下链 $x\in C_q(K)$ 也可以唯一地分解为 L 上的部分 x_L 与 $K-L$ 上的部分 x_{K-L}：

$$x=x_L+x_{K-L},\quad x_L\in C_q(L),\quad x_{K-L}\in C_q(K-L).$$

然后采取下面的定义：

3.1 定义 设 $x\in C_q(K-L)$，而且把 x 看作 K 上的链时，它的下边缘是 ∂x. 把 ∂x 在 $K-L$ 上的部分 $(\partial x)_{K-L}$ 叫作 x 在 $K-L$ 上的下边缘，并记作 $\hat{\partial} x$：

$$\hat{\partial} x=(\partial x)_{K-L}.$$

把 $\hat{\partial}$ 叫作 $K-L$ 上的**下边缘算子**.

附　记　此后不论 $x\in C_q(K-L)$ 或 $\in C_q(L)$, ∂x 都是指把 x 看作 K 上的链时的下边缘.

读者立刻看出:

$$\hat{\partial}:C_q(K-L)\to C_{q-1}(K-L)$$

是同态.

3.2 定理　$\hat{\partial}\hat{\partial}=0$.

证　明　设 $x\in C_q(K-L)$. 则

$$\hat{\partial}x=(\partial x)_{K-L}=\partial x-(\partial x)_L,$$

因而

$$\hat{\partial}\hat{\partial}x=\hat{\partial}\{\partial x-(\partial x)_L\}=[\partial\{\partial x-(\partial x)_L\}]_{K-L}$$
$$=[-\partial\{(\partial x)_L\}]_{K-L}.$$

现在 $(\partial x)_L$ 是 L 上的链; 而且, 因为 L 是 K 的子复形, L 上的下边缘算子就是 K 上的 ∂, 因而 $-\partial\{(\partial x)_L\}$ 仍是 L 上的链. 于是这后一个链的在 $K-L$ 上的部分是零. ▌

如同先前作过的那样, 从本定理出发, 分别定义 $K-L$ 的**下闭链群与下边缘链群**

$$Z_q(K-L)=\hat{\partial}_q\text{ 核},\quad B_q(K-L)=\hat{\partial}_{q+1}\text{ 象},$$

得 $C_q(K-L)\supset Z_q(K-L)\supset B_q(K-L)$; 然后定义 $K-L$ **的下同调群**

$$H_q(K-L)=Z_q(K-L)/B_q(K-L).$$

例 3.1　设 K 是一个连通的复形, 它的顶点不只一个, 而且 a 是它的一个顶点. 因为 $K-a$ 的任一顶点既是 $K-a$ 上的一个闭链, 又是 $K-a$ 上的一个边缘链, 所以 $H_0(K-a)=0$.

例 3.2　设 $\underline{s}^n$ 与 $\dot{s}^n$ 分别表示一个 n 维单形的闭包复形与边缘复形. 则

$$H_q(\underline{s}^n-\dot{s}^n)=0,\ q\neq n;\quad H_n(\underline{s}^n-\dot{s}^n)\approx J.$$

(复习题.)

我们现在指出相对下同调的另一看法. 命

$$C_q(K \bmod L) = C_q(K)/C_q(L).$$

首先, $C_q(K \bmod L)$ 的元素就是 $C_q(L)$ 在 $C_q(K)$ 中的陪集 $x+C_q(L)$, $x \in C_q(K)$. 其次, 因为 L 是 K 的子复形,同态 $\partial: C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ 同时也把 $C_q(L)$ 映到 $C_{q-1}(L)$, 因而(命题 B1.4) ∂ 诱导出一个同态

$$\tilde{\partial}: C_q(K \bmod L) \to C_{q-1}(K \bmod L).$$

由于 $\partial\partial=0$, 所以 $\tilde{\partial}\tilde{\partial}=0$ (B§1 中习题 4). 最后,从后一方程出发, 又得到下同调群,可记作 $H_q(K \bmod L)$. 我们来说明 $H_q(K \bmod L) \approx H_q(K-L)$. 事实上,对于 $C_q(K-L)$的任一元素 y, 定义 $h(y)=y+C_q(L) \in C_q(K \bmod L)$. 很明显,

$$h: C_q(K-L) \approx C_q(K \bmod L);$$

并且 $h\hat{\partial}=\tilde{\partial}h$; 即同构 h 保持边缘; 然后易见 $h: H_q(K-L) \approx H_q(K \bmod L)$. (复习题.)此后的讨论都只用 $K-L$ 的看法.

此后我们把 $K-L$ 改记为 (K, L), 叫作一对复形, 把 $C_q(K-L)$, $H_q(K-L)$ 等都改记为 $C_q(K, L)$, $H_q(K, L)$ 等. 一对复形 (K, L) 中的 L 必须是 K 的子复形; (K, L) 的下同调群即相对于 L 的、K 的相对下同调群.

相对上同调群 设 K 是一个复形, L 是 K 的一个子复形. 我们把 §2 中的方法用到 $K-L=(K, L)$, 来定义 (K, L) 的上同调群,即相对于 L 的、K 的相对上同调群.

设 G 是任一交换群. (K, L) 的以 G 为值群的 q 维上链就是从(K, L)的 q 维整下链群 $C_q(K, L)$ 到 G 的一个同态:

$$y^q: C_q(K, L) \to G,$$

(K, L) 的以 G 为值群的 q 维上链群 $C^q(K, L; G)$ 就是 Hom $(C_q(K, L), G)$:

$$C^q(K, L; G) = \mathrm{Hom}(C_q(K, L), G).$$

然后还同 §2 中一样, 得到 (K, L) 的上链与下链的 Kronecker 积,以及上链的线性表示.

(K, L) 的任一上链 y^q 有唯一的一个线性表示，而这线性表示又表出 K 的唯一的一个以 G 为值群的上链 x^q; 我们等同 y^q 与这样的 x^q. 在这意义下，$C^q(K, L; G)$ 是 $C^q(K; G)$ 的一个子群，而且有下述命题.

3.3 命题 复形 K 上的上边缘同态

$$\delta: C^q(K; G) \to C^{q+1}(K; G)$$

也把 $C^q(K; G)$ 的子群 $C^q(K, L; G)$ 映到 $C^{q+1}(K; G)$ 的子群 $C^{q+1}(K, L; G)$:

$$\delta: C^q(K, L; G) \to C^{q+1}(K, L; G). \tag{1}$$

再者，式(1)中的同态是定义 3.1 中的、(K, L) 上的下边缘算子

$$\hat{\partial}: C_{q+1}(K, L) \to C_q(K, L)$$

的对偶同态.

证 明 设 $y^q \in C^q(K, L; G)$ (看作是 $C^q(K; G)$ 的一元素)，而且 t^{q+1} 是 L 的任一 $q+1$ 维有向单形. 由于 L 是 K 的子复形，所以 ∂t^{q+1} 在 L 上; 因而，在 K 上，

$$\langle \delta y^q, t^{q+1} \rangle = \langle y^q, \partial t^{q+1} \rangle = 0.$$

这说明 $\delta y^q \in C^{q+1}(K, L; G)$.

要想证明的第二个结论是说: 对于任意 $x_{q+1} \in C_{q+1}(K, L)$ 与任意 $y^q \in C^q(K, L; G)$, 有

$$\langle \delta y^q, x_{q+1} \rangle = \langle y^q, \hat{\partial} x_{q+1} \rangle.$$

因为在把 x_{q+1} 与 y^q 分别看作 $C_{q+1}(K)$ 与 $C^q(K; G)$ 的元素时，K 上的 δ 是 K 上的 ∂ 的对偶同态，即 $\langle \delta y^q, x_{q+1} \rangle = \langle y^q, \partial x_{q+1} \rangle$; 又因为 y^q 在 L 的下链处的值都是零，所以

$$\langle y^q, \partial x_{q+1} \rangle = \langle y^q, (\partial x_{q+1})_{K-L} \rangle;$$

最后，从 $\hat{\partial}$ 的定义，$\langle y^q, (\partial x_{q+1})_{K-L} \rangle = \langle y^q, \hat{\partial} x_{q+1} \rangle$. 这就完成了我们的证明. ∎

3.1c 定义 把式(1)中 δ 叫作(K, L)上的**上边缘算子**.

3.2c 定理 在 δ 作为(K, L)上的上边缘算子时，$\delta\delta=0$.

证 明 由于 δ 作为 K 上的上边缘算子时的定理 2.2, 命题 3.3 的第一结论以及 B§1 中习题 4. ▌

定理 3.2 与 3.2c 是对应的定理，是分别关于(K, L)上的下边缘算子与上边缘算子的. 同样地有对应的定义 3.1 与 3.1c. 以后将常采用这种编号的办法.

由于有了命题 3.3 的第二个结论，(K, L)的上下边缘算子间的关系，就跟 §2 中 K 的相同. 然后还仿照 §2 中(把式(1)中上边缘算子看作是 δ^q, 而且 $\delta=\{\delta^q\}$)，命(K, L)的上闭链群与上边缘链群分别为

$$Z^q(K, L; G)=\delta^q\text{ 核},\quad B^q(K, L; G)=\delta^{q-1}\text{ 象};$$

因为

$$C^q(K, L; G)\supset Z^q(K, L; G)\supset B^q(K, L; G),$$

定义(K, L)的**上同调群**

$$H^q(K, L; G)=Z^q(K, L; G)/B^q(K, L; G).$$

例 3.1c 例 3.1 中的(K, a)的 $H^0(K, L)=0$.（复习题.）

例 3.2c $H^q(\underline{s}^n, \dot{s}^n)=0,\ q\neq n$; $H^n(\underline{s}^n, \dot{s}^n)\approx J$.（复习题.）

切除定理 本定理将使我们能灵活地运用相对同调群. 根据链的线性组合的表示法，证明都是明显的.

3.4 定理(切除定理) 如果复形 K 是它的两个子复形 K_1 与 K_2 的并集: $K=K_1\cup K_2$, 则对于所有的 q,

$$H_q(K_2, K_1\cap K_2; G)\approx H_q(K, K_1; G),$$

$$H^q(K_2, K_1\cap K_2; G)\approx H^q(K, K_1; G).$$

证 明 $K_1\cap K_2$ 显明地是一个复形，而且是 K_2 的一个子复形. 从一对复形 (K, K_1) 的 K 与 K_1 各消去(即“切除”)一个开子复形 $K-K_2$, 就得到一对新复形 $(K_2, K_1\cap K_2)$(图 6)；因

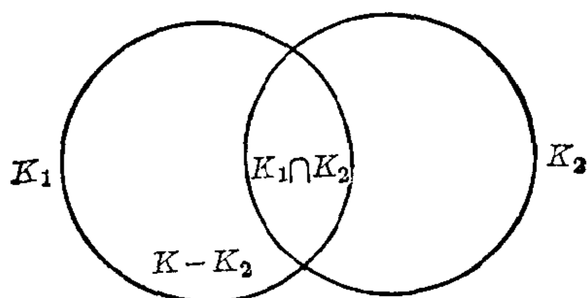


图 6

而

$$K_2-K_1\cap K_2=K-K_1. \tag{2}$$

于是对于每一个 q,

$$C_q(K_2,\ K_1\cap K_2;G)=C_q(K,\ K_1;\ G). \tag{3}$$

再者,把 $(K,\ K_1)$ 与 $(K_2,\ K_1\cap K_2)$ 上的下边缘算子分别记作 $\hat{\partial}$ 与 $\hat{\partial}'$. 根据式(2),我们还得到,对于式(3)的两个下链群中的每一个下链 x,

$$\hat{\partial}'x=\hat{\partial}x.$$

然后有

$$Z_q(K_2,\ K_1\cap K_2;\ G)=Z_q(K,\ K_1;\ G),$$

$$B_q(K_2,\ K_1\cap K_2;\ G)=B_q(K,\ K_1;\ G);$$

于是得到本定理的第一个结论.

第二个结论同样地证明. 】

附　记　如果改变记号,把 K_1 改记作 L, 而且把开子复形 $K-K_2$ 改记作 O, 则

$$K\supset L\supset O,\quad K_2=K-O,\quad K_1\cap K_2=L-O;$$

然后切除定理是说: $(K-O,\ L-O)$ 的各维同调群分别同构于 $(K,\ L)$ 的. 因而我们可以直观地说, L 的内部 O 不影响 $(K,\ L)$ 的同调群.

例 3.3　设 $\underline{s}^n$ 是一个 n 维单形 $(n>1)$, 而且 $\underline{s}^{n+1}=a\circ\underline{s}^n$ 是 $n+1$ 维单形. 则

$$H_q(\dot{s}^{n+1}, a\circ\dot{s}^n)\approx H_q(s^n, \dot{s}^n),$$
$$H^q(\dot{s}^{n+1}, a\circ\dot{s}^n)\approx H^q(s^n, \dot{s}^n).$$

事实上，附记中的 $K=\dot{s}^{n+1}$, $L=a\circ\dot{s}^n$, $O=\dot{s}^{n+1}-s^n$, 而 O 是 L 的内部；定理 3.4 的证明中的 $K_1=a\circ\dot{s}^n$, $K_2=s^n$, $K_1\cap K_2=\dot{s}^n$.

习　题

1. 设K是例 III.4.4 中的射影平面的单纯剖分，L 是 a^1a^2, a^2a^3 与 a^3a^1 以及它们的顶点所形成的子复形．试求 $H_q(K, L)$ 与 $H^q(K, L)$．

2. 设 $s^3=(a^0, a^1, a^2, a^3)$, $s^2=(a^0, a^1, a^2)$. 试求 $H_q(\dot{s}^3, \dot{s}^2)$ 与 $H^q(\dot{s}^3, \dot{s}^2)$.

3. 设 M 是一个带边缘的 n 维假流形，而且 L 是它的边缘（定义 III.4.4）．试求 $H_n(M, L)$ 与 $H^n(M, L)$．

4. 设 K 是一个复形，它的顶点不只一个，而且 a 是它的一个顶点．试用 K 的同调群来表出 $H_q(K, a)$ 与 $H^q(K, a)$．

5. 试讨论利用 Kronecker 积把 $H^q(K, L; G)$ 与 $H_q(K, L)$ 配对到 G.

4. 同 调 序 列

设 K 是一个复形，L 是它的一个子复形．本节中将引进同调序列这个概念，然后证明同调序列的恰当性（定理 4.4）．这就把 K, L, 与 (K, L) 的下同调群或上同调群之间的一些关系方便地而且集中地表达出来．同调序列的应用在 §5 中．

下同调序列　在定义 3.1 前说过，K 的 q 维整下链群的任一元素 x 有唯一的分解：

$$x=x_L+x_{K-L},\quad x_L\in C_q(L),\quad x_{K-L}\in C_q(K, L).\tag{1}$$

特别地，对于这三个链群的零元素，有

$$o=o_L+o_{K-L}.$$

现在引进下面的单值对应:

$$i: x_L \to x_L + o_{K-L}, \quad j: x \to x_{K-L}.$$

容易看出,

$$i: C_q(L) \to C_q(K), \quad j: C_q(K) \to C_q(K, L)$$

都是同态,分别叫作**包含同态**与**限制同态**.

因为 L 是 K 的子复形, 包含映射 $\underline{i}: L \to K$ 实际上是一个单纯映射. 因为 i 是由 $\underline{i}$ 诱导出的,所以它是一个链映射:

4.1 命题 $\partial i = i\partial$, 即 i 是链映射. ▌

4.2 命题 $\hat{\partial} j = j\partial$, 即 j 是链映射.*)

证　明　设 $x \in C_q(K)$. 根据 j 与 $\hat{\partial}$ 的定义以及式(1)(参看定义 3.1 后的附记),

$$\begin{aligned} j\partial x - \hat{\partial} jx &= (\partial x)_{K-L} - \{\partial(x_{K-L})\}_{K-L} \\ &= \{\partial(x - x_{K-L})\}_{K-L} = (\partial x_L)_{K-L}. \end{aligned}$$

但 L 是 K 的子复形, 所以 ∂x_L 是 L 上的下链; 于是 $(\partial x_L)_{K-L}$ 是零. ▌

链映射 i 与 j 分别叫作**包含链映射**与**限制链映射**. 还容易看出,下面的图表

$$0 \to C_q(L) \xrightarrow{i} C_q(K) \xrightarrow{j} C_q(K, L) \to 0 \tag{2}$$

具有恰当性. 这两个链映射当然分别诱导出同调群之间的同态 $i_* = \{i_{q*}\}$, $j_* = \{j_{q*}\}$,

$$i_{q*}: H_q(L) \to H_q(K), \quad j_{q*}: H_q(K) \to H_q(K, L).$$

虽然同态 i 是单一的, j 是满的, 但 i_* 未必单一, j_* 也未必满; 例如取 $K = \underline{s}^n$, $L = \dot{\underline{s}}^n$ (参看例 3.2). 由于这事实, 我们不能不感觉到, 虽然 i 与 j 是明显而又简单的同态, 同态 i_* 与 j_* 以及即将引进的第三个同态 ∂_* 可能引导到有意义的结果.

*) 严格地说,这里需要把链映射的定义 IV.1.1 先推广到相对下链. 但应如何推广, 是明显的.

在§3中引进(K, L)上的下边缘算子时，我们已经说过，如果把K上的下边缘算子∂应用到$C_q(K, L)$，则$\partial C_q(K, L)\not\subset C_{q-1}(K, L)$. 但如果把$\partial$应用到$Z_q(K, L)$，则不但有

$$\partial Z_q(K, L)\subset C_{q-1}(L),$$

而且还有下述命题.

4.3 命题 复形K上的下边缘算子∂限制在$Z_q(K, L)$上时，有

$$\partial: Z_q(K, L)\to Z_{q-1}(L),$$

$$\partial: B_q(K, L)\to B_{q-1}(L).$$

因而根据推论B1.5，∂诱导出同态$\partial_*=\{\partial_{q*}\}$:

$$\partial_{q*}: H_q(K, L)\to H_{q-1}(L). \tag{3}$$

证 明(参看例4.1) 设$z\in Z_q(K, L)$，即$\hat{\partial}z=(\partial z)_{K-L}=0$，或$\partial z\in C_{q-1}(L)$. 但$\partial\partial z=0$，因而$\partial z\in Z_{q-1}(L)$.

再设$b\in B_q(K, L)$，即$b=\hat{\partial}x=\partial x-(\partial x)_L$，$x\in C_{q+1}(K, L)$. 所以

$$b-\partial x=-(\partial x)_L\in C_q(L).$$

于是 $\partial b=\partial(b-\partial x)=\partial\{-(\partial x)_L\}\in B_{q-1}(L)$. ▌

总起来说，这第三个同态∂_*的来源∂与前两个同态i_*，j_*的来源i，j有所不同：i定义在$C_q(L)$上，j定义在$C_q(K)$上；而∂原来定义在$C_q(K)$上，但在引进∂_*时只把∂限制在$Z_q(K, L)$上. 另一方面，这三个同态有下述的相同之处：命题4.3是说，对于相对下闭链$z\in\overset{*}{z}\in H_q(K, L)$，

$$\partial_*(\overset{*}{z})=(\partial z)^*\in H_{q-1}(L); \tag{4}$$

当然，对于i_*与j_*，我们有相仿的公式.

例 4.1 设K是图7表出的复形，它的α^0，α^1与α^2分别是6，8与2，而且它的子复形L是画有阴影的一个二维单形的闭包复形. 读者可用此例来帮助理解命题4.3的证明.

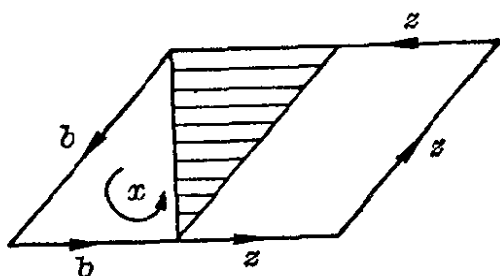


图　7

设复形 K 是 n 维的．因为有了上面三个同态，我们可以写下下面的同调群与同态的序列：

$$0\to H_n(L)\xrightarrow{i_*}H_n(K)\xrightarrow{j_*}H_n(K,L)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(L)\xrightarrow{i_*}\cdots$$

$$\xrightarrow{\partial_*}H_q(L)\xrightarrow{i_*}H_q(K)\xrightarrow{j_*}H_q(K,L)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(L)\xrightarrow{i_*}\cdots$$

$$\xrightarrow{\partial_*}H_0(L)\xrightarrow{i_*}H_0(K)\xrightarrow{j_*}H_0(K,L)\xrightarrow{\partial_*}0, \qquad (5)$$

叫作(K, L)的**下同调序列**．在这序列中，当然在 $q>L$ 的维数或 $q>K-L$ 的所有单形的维数时，分别把 $H_q(L)$ 或 $H_q(K, L)$ 理解为零群．

4.4 定理　设 K 是 n 维复形．而且 L 是 K 的非空子复形．一对复形 (K, L) 的下同调序列(5)具有恰当性．(即除去第一个和第末个零群外，在每一个群处具有恰当性．)

证　明　我们说一个序列

$$\cdots\to G_{i+1}\xrightarrow{\varphi_{i+1}}G_i\xrightarrow{\varphi_i}G_{i-1}\to\cdots \qquad (6)$$

在群 G_i 处具有恰当性，是说

$$\varphi_{i+1}\text{象}=\varphi_i\text{核}.$$

这个等式的证明通常分成两步：

$$\varphi_{i+1}\text{象}\subset\varphi_i\text{核},\quad \varphi_{i+1}\text{象}\supset\varphi_i\text{核}.$$

对于下同调序列来说，第一步比较容易，因为它是 $\varphi_i\varphi_{i+1}=0$ 的推论，而我们就将看到，$\varphi_i\varphi_{i+1}=0$ 是比较明显的．(我们可以认为这个比较明显的事实引导人们得到本定理．)第二步稍微复杂一些，

但仍然是直接而无曲折的．这时候，对于 φ_i 核的任一元素 g_i，必须求得 G_{i+1} 的一个元素 g_{i+1}，使得 $\varphi_{i+1}(g_{i+1})=g_i$．（在下面的证明中，$g_i$ 与 g_{i+1} 分别是 $\overset{*}{z}$ 与 $\overset{*}{y}$；而 $\varphi_i(g_i)=0\in G_{i-1}$ 给出与 G_{i-1} 有关的 x.）

本定理的证明分成三部分，而每一部分又分成两步．

1) $H_q(K)$ 处的恰当性．序列中有关的一段是

$$H_q(L)\xrightarrow{i_*}H_q(K)\xrightarrow{j_*}H_q(K,L).$$

第一步是明显的．事实上，从式(2)，或直接从 i 与 j 的定义，有 $ji=0$；因而从命题 IV.1.3，$j_*i_*=0$．

第二步，设 $z\in\overset{*}{z}\in H_q(K)$，而且 $j_*(\overset{*}{z})=0$．这就是说，$jz\in B_q(K,L)$；即存在 $x\in C_{q+1}(K,L)$，使得 $\hat{\partial}x=jz$；换句话说，$(\partial x)_{K-L}=(z)_{K-L}$．因此 $z-\partial x\in C_q(L)$．记 $y=z-\partial x$，则 $\partial y=\partial z-\partial\partial x=0$，即 $y\in Z_q(L)$．另一方面，$i_*(\overset{*}{y})=(iy)^*=(z-\partial x)^*=\overset{*}{z}$.

2) $H_q(K,L)$ 处的恰当性．序列中有关的一段是

$$H_q(K)\xrightarrow{j_*}H_q(K,L)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(L).$$

第一步，设 $z\in\overset{*}{z}\in H_q(K)$．根据式(1)与 j 的定义，$jz=z-z_L$；所以 $\partial jz=\partial(-z_L)\in B_{q-1}(L)$．于是根据命题 4.3 或式(4)，$\partial_*j_*(\overset{*}{z})=(\partial jz)^*=0$.（在 $q=0$ 时，$B_{-1}(L)$ 与 $H_{-1}(L)$ 都看作是零群.）

第二步，设 $z\in\overset{*}{z}\in H_q(K,L)$，而且 $\partial_*(\overset{*}{z})=0$．从式(4)，$\partial z\in B_{q-1}(L)$，即存在 $x\in C_q(L)$ 使得 $\partial z=\partial x$.（在 $q=0$ 时，可取 $x=0$.）记 $y=z-x$，则一方面有 $y=z-x\in Z_q(K)$，另一方面又有 $jy=j(z-x)=z$．于是 $j_*(\overset{*}{y})=\overset{*}{z}$.

3) $H_q(L)$ 处的恰当性．现在序列中有关的一段是

$$H_{q+1}(K,L)\xrightarrow{\partial_*}H_q(L)\xrightarrow{i_*}H_q(K).$$

第一步，对于 $z\in\overset{*}{z}\in H_{q+1}(K,L)$，$i_*\partial_*(\overset{*}{z})=(i\partial z)^*$，但 $i\partial z=\partial z\in B_q(K)$；于是 $i_*\partial_*=0$.（在 $q=n$ 时，$H_{q+1}(K,L)=0$，$z=0$.）

第二步，设 $z\in\overset{*}{z}\in H_q(L)$，而且 $i_*(\overset{*}{z})=0$. 这就是说，$iz=z\in B_q(K)$；即存在 $x\in C_{q+1}(K)$，使得 $iz=z=\partial x$. 命 $y=jx$，设 $y\in\overset{*}{y}$；我们要来证明 $\partial_*\overset{*}{y}=\overset{*}{z}$. 根据命题 4.2 以及 $ji=0$，有

$$\hat{\partial}y=\hat{\partial}jx=j\partial x=jiz=0,$$

即 $y\in Z_{q+1}(K,L)$. 再者，$jx=x-x_L$ 蕴涵 $\partial jx=\partial x-\partial(x_L)$，这里 $\partial(x_L)\in B_q(L)$；因而

$$\partial_*(\overset{*}{y})=\partial_*(jx)^*=(\partial jx)^*=(\partial x)^*=\overset{*}{z}. \quad ▮$$

上同调序列　设 G 是任一交换群. 考虑一对复形 (K,L) 的同态 i 与 j:

$$C_q(L)\xrightarrow{i}C_q(K)\xrightarrow{j}C_q(K,L)$$

的对偶同态 $i^{\cdot}$ 与 $j^{\cdot}$:

$$C^q(L;G)\xleftarrow{i^{\cdot}}C^q(K;G)\xleftarrow{j^{\cdot}}C^q(K,L;G).$$

K 上的一个上链 x 也有唯一的分解:

$$x=x_L+x_{K-L},\quad x_L\in C^q(L;G),\quad x_{K-L}\in C^q(K,L;G). \tag{1c}$$

容易看出，

$$i^{\cdot}:x\to x_L,\qquad j^{\cdot}:x_{K-L}\to o_L+x_{K-L};$$

即 $j^{\cdot}$ 是包含同态，而 $i^{\cdot}$ 是限制同态，与下同调时恰相反. (见习题 1) 还容易想到下列命题与定理.

4.1c 命题　$i^{\cdot}\delta^{\cdot}=\delta i^{\cdot}$. ▮

4.2c 命题　$j^{\cdot}\delta=\delta j^{\cdot}$. ▮

根据这两个命题，$i^{\cdot}$ 与 $j^{\cdot}$ 分别诱导出同态 i^* 与 j^*:

$$H^q(L;G)\xleftarrow{i^*}H^q(K;G)\xleftarrow{j^*}H^q(K,L;G).$$

4.3c 命题　复形 K 上的上边缘算子 δ 限制在 $Z^q(L;G)$ 上时，有

$$\delta:Z^q(L;G)\longrightarrow Z^{q+1}(K,L;G),$$

$$\delta: B^q(L;G) \longrightarrow B^{q+1}(K, L; G).$$

因而 δ 诱导出一个同态

$$\delta^*: H^q(L;G) \longrightarrow H^{q+1}(K, L; G). \;] \tag{3c}$$

4.4c 定理 设 K 是 n 维复形，L 是 K 的非空子复形. 一对复形 (K, L) 的**上同调序列**

$$0 \leftarrow H^n(L) \xleftarrow{i^*} H^n(K) \xleftarrow{j^*} H^n(K, L) \xleftarrow{\delta^*} H^{n-1}(L) \leftarrow \cdots$$
$$\xleftarrow{\delta^*} H^q(L) \xleftarrow{i^*} H^q(K) \xleftarrow{j^*} H^q(K, L) \xleftarrow{\delta^*} H^{q-1}(L) \xleftarrow{i^*} \cdots$$
$$\xleftarrow{\delta^*} H^0(L) \xleftarrow{i^*} H^0(K) \xleftarrow{j^*} H^0(K, L) \xleftarrow{\delta^*} 0 \tag{5c}$$

具有恰当性.]

附 记 在定理 4.4 与 4.4c 中的系数群 J 改为任意交换群 G 时，定理仍成立，而且证明在形式上仍是一样的.

例 4.2 假设习题 3 中的 1). 根据 $\underline{s}^n (n>1)$ 的同调群以及定理 4.4 与 4.4c, 有

$$H_q(\underline{s}^n, \dot{\underline{s}}^n) \approx H_{q-1}(\dot{\underline{s}}^n), \quad H^q(\underline{s}^n, \dot{\underline{s}}^n) \approx H^{q-1}(\dot{\underline{s}}^n), \quad q>1.$$

例 4.3 用前一例的方法，知例 3.3 中的

$$H_q(\dot{\underline{s}}^{n+1}, a\circ\dot{\underline{s}}^n) \approx H_q(\dot{\underline{s}}^{n+1}), \quad H^q(\dot{\underline{s}}^{n+1}, a\circ\dot{\underline{s}}^n) \approx H^q(\dot{\underline{s}}^{n+1}), \quad q>1.$$

单纯映射与同调序列的同态 设 (K, L) 与 (K', L') 是两对复形. 如果 $\underline{f}: K \to K'$ 是单纯映射，使得 $\underline{f}(L) \subset L'$，我们就说 $\underline{f}$ 是从 (K, L) 到 (K', L') 的**单纯映射**，并记作 $\underline{f}: (K, L) \to (K', L')$. 这时候，当然有诱导出的同态：

$$f_{q*}: H_q(K) \to H_q(K'), \quad (f|L)_{q*}: H_q(L) \to H_q(L').$$

不但如此，我们来说明，这时候 f' 还自然地诱导出从 $H_q(K, L)$ 到 $H_q(K', L')$ 的另一个同态. 考虑任一 $y \in C_q(K, L)$. 然后存在 $x \in C_q(K)$，使得 $x_{K-L} = y$. 我们定义

$$\hat{f}(y) = (fx)_{K'-L'}, \tag{7}$$

这定义不依赖于 x 的选取；因而可取 $x=y$. 事实上，如果

$x'\in C_q(K)$ 使得 $x'_{K-L}=y$, 则因为

$$\underline{f}(L)\subset L',\quad (fx')_{K'-L'}=(fx)_{K'-L'}.$$

再者, $\hat{f}:C_q(K,L)\to C_q(K',L')$ 是链映射, 因为, 根据 $\hat{\partial}$ 与 $\hat{f}$ 的定义,

$$\begin{aligned}\hat{f}\hat{\partial}y&=\hat{f}(\partial y)_{K-L}=(f\partial y)_{K'-L'}\\&=(\partial fy)_{K'-L'}=\hat{\partial}(fy)_{K'-L'}=\hat{\partial}\hat{f}y,\end{aligned}$$

这里的 y 有时被看作是 $C_q(K)$ 的元素. 因而 $\hat{f}$ 诱导出同态

$$\hat{f}_{q*}:H_q(K,L)\to H_q(K',L');$$

它就是上文所说的、f 自然地诱导出的另一个同态.

4.5 命题 一个单纯映射 $\underline{f}:(K,L)\to(K',L')$ 所诱导出的下同调群之间的三个同态 f_*, $\hat{f}_*$ 与 $(f|L)_*$, 使得下列图表具有交换性:

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots\to H_q(L) & \xrightarrow{i_*} & H_q(K) & \xrightarrow{j_*} & H_q(K,L) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(L)\to\cdots\\ \downarrow{\scriptstyle (f|L)_{q*}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{q*}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}_{q*}} & & \downarrow{\scriptstyle (f|L)_{q-1*}}\\ \cdots\to H_q(L') & \xrightarrow{i_*} & H_q(K') & \xrightarrow{j_*} & H_q(K',L') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(L')\to\cdots.\end{array}$$

在这意义下, 我们说 $\underline{f}$ 诱导出 (K,L) 与 (K',L') 的**同调序列之间的一个同态**.

证 明 我们只证明下列三个等式:

$$f_{q*}i_*=i_*(f|L)_{q*},\quad \hat{f}_{q*}j_*=j_*f_{q*},\quad (f|L)_{q-1*}\partial_*=\partial_*\hat{f}_{q*}$$

中的最后一个, 其他两个的证明类似而且比较容易.

考虑任一 $z\in Z_q(K,L)$. $f\partial z$ 是同调类 $(f|L)_{q-1*}\partial_*\tilde{z}$ 中的一个闭链. 另一方面, 根据式(7)(取 y 作为其中的 x),

$$\partial\hat{f}z=\partial(fz)_{K'-L'}=\partial\{fz-(fz)_{L'}\}=\partial fz-\partial(fz)_{L'},$$

所以 $\partial\hat{f}z$ 与 ∂fz 都是同调类 $\partial_*\hat{f}_{q*}\tilde{z}$ 中的闭链. 但由于 $\partial f=f\partial$, 所以得到第三个等式. ▌

习 题

1. 试证：对于一对复形(K, L)，

$$0 \leftarrow C^q(L; G) \xleftarrow{i^*} C^q(K; G) \xleftarrow{j^*} C^q(K, L; G) \leftarrow 0$$

具有恰当性．参看§1的习题3与6．

2. 设(K, L)是一对复形．试举例说明：下面的包含同态α与限制同态β都不必能与下边缘算子交换：

$$\alpha: C_q(K, L) \to C_q(K), \quad \beta: C_q(K) \to C_q(L).$$

3. 利用前习题中的α与β，定义$\nu = \beta\partial\alpha$．试证：$\partial\nu = -\nu\hat{\partial}$，因而$\nu$诱导出同态$\nu_*: H_q(K, L) \to H_{q-1}(L)$．

并试证：ν_*即命题4.3中的∂_*．

4. 设式(6)是恰当序列．试证：

1) $\varphi_{i+1} = \varphi_{i-1} = 0 \Leftrightarrow \varphi_i: G_i \approx G_{i-1}$；

2) $G_i = 0 \Leftrightarrow \varphi_{i+1} = \varphi_i = 0$；

3) $G_i = 0 \Leftrightarrow \varphi_{i+2}$象$= G_{i+1}$与$\varphi_{i-1}$核$= 0$．

5. 试从例3.2，4.2与4.3，用归纳法证明$H_n(\dot{s}^{n+1}) \approx J$，$n > 1$．

6. 设(K, L)是§3的习题1中所给定的一对复形．试求它的整下同调序列中每个同态的核与象．

7. 设$s^3 = (a^0, a^1, a^2, a^3)$，而且$s^2 = (a^0, a^1, a^2)$．设单纯映射$f: (\dot{s}^3, s^2) \to (\dot{s}^3, a^3)$，这里$f(a^3) = a^3$，$f(a^i) = a^0$，$i = 0, 1, 2$．试求$f$所诱导出的三个同态$f_*$，$(f|s^2)_*$，$\hat{f}_*$．

8. 试证定理4.4c.

5．增广复形·切除定理与同调序列的应用

为着简化一些公式与讨论，本节中将首先引进复形K的增广复形，并给出一对复形的增广同调序列．然后给出切除定理与这个同调序列的一些应用．

本节中只限于系数群J．任意交换群G的讨论是相同的．

本节中关于增广复形的一些结果，特别是关于上同调的全部结果，都无证明．第一次读时，可以只先掌握增广复形的下同调群

的定义，与已证明的部分，并承认定理 5.3，即进而读以后的应用部分.

增广复形 设 K 是一个复形. 引进一个新元素，叫作负一维的单形，记作 $\underline{s}^{-1}$. 记

$$K^{+}=K\cup\{\underline{s}^{-1}\},$$

叫作 K 的**增广复形**. 把 $\underline{s}^{-1}$ 作为 K 的每一个单形的面，特别地，它是 K 的每一个顶点 a^{i} 的面. 在把单形理解为点集时，$\underline{s}^{-1}$ 可以理解为空集. 引进 $\underline{s}^{-1}$ 的定向，说 $\underline{s}^{-1}$ 有两个相应的有向单形，记作 s^{-1} 与 $-s^{-1}$. 然后从 K 的下边缘算子 $\partial=\{\partial_q\}$，定义 K^{+} 的下边缘算子 $\partial^{+}=\{\partial_q^{+}\}$：

$$\partial_{-1}^{+}=0,\quad \partial_0^{+}(\pm a^{i})=\pm s^{-1},\quad \partial_q^{+}=\partial_q,\quad q>0. \tag{1}$$

∂^{+} 也叫作 K 的**增广下边缘算子**.

明显地还有 $\partial^{+}\partial^{+}=0$. 于是增广复形 K^{+} 的下同调群，或 **K 的增广下同调群**，定义为

$$H_q(K^{+})=\partial_q^{+}\text{ 核}/\partial_{q+1}^{+}\text{ 象}=Z_q(K^{+})/B_q(K^{+}),$$
$$q=-1,0,1,\cdots.$$

复形 K 的增广上边缘算子 $\delta_{+}=\{\delta_{+}^{q}\}$ 与增广上同调群如何定义是明显的.

5.1 命题 如果复形 K 非空，则

$$\begin{aligned}
&H_{-1}(K^{+})=0, && H_0(K)\approx J+H_0(K^{+}),\\
& && H_q(K^{+})=H_q(K),\quad q>0,\\
&H^{-1}(K^{+})=0, && H^0(K)\approx J+H^0(K^{+}),\\
& && H^q(K^{+})=H^q(K),\quad q>0.
\end{aligned}$$

如果 K 是空的，则

$$H_{-1}(K^{+})\approx J,\quad H_q(K^{+})=H_q(K)=0,\quad q\geqslant 0,$$
$$H^{-1}(K^{+})\approx J,\quad H^q(K^{+})=H^q(K)=0,\quad q\geqslant 0.$$

证　明　首先，考虑非空的复形 K 的增广下同调. 因为不牵涉到 s^{-1} (参看式(1))，有

$$Z_q(K^+)=Z_q(K),\quad q>0;\quad B_q(K^+)=B_q(K),\quad q\geqslant 0;$$

所以有 $q>0$ 时的结论. 在 $q=-1$ 时，因为

$$Z_{-1}(K^+)=Js^{-1}=B_{-1}(K^+)$$

(后一等式用到 K 非空这个假设). 最后考虑 $q=0$. 一方面

$$Z_0(K^+)=\{K\text{ 上的零维链 }x_0\,|\,\mathrm{In}(x_0)=0\}\supset B_0(K^+).$$

另一方面，如果 a 为 K 的一个固定的顶点，则

$$Z_0(K)=J_a+Z_0(K^+),\quad B_0(K)=O_a+B_0(K^+).$$

关于空复形 K 的结论是明显的. ▌

例 5.1　设 $\hat{K}$ 是一个锥形. 利用增广复形 $\hat{K}^+$，例 III.4.7 与例 2.5 的结果，在用整系数时，可以简写为

$$H_q(K^+)=0,\quad H^q(K^+)=0,\quad q\geqslant 0.$$

考虑一对复形 (K^+, L^+). 这时候，L^+ 中的负一维单形就是 K^+ 中的负一维单形，$K^+-L^+=K-L$ 不再含有 s^{-1}. 所以明显地有下述命题.

5.2 命题　不论一对复形(K, L)中的 L 是否空复形，

$$H_{-1}(K^+, L^+)=0,\quad H_q(K^+, L^+)=H_q(K, L),\quad q\geqslant 0,$$

$$H^{-1}(K^+, L^+)=0,\quad H^q(K^+, L^+)=H^q(K, L),\quad q\geqslant 0. ▌$$

设(K, L)中的 K 是 n 维的，而且 K 与 L 皆非空；考虑一对增广复形(K^+, L^+). 完全同 §4 中定义 i_*, j_*, ∂_* 那样，得到下列同态：

$$H_q(L^+)\xrightarrow{i^+_{q*}}H_q(K^+)\xrightarrow{j^+_{q*}}H_q(K^+, L^+)\xrightarrow{\partial^+_{q*}}H_{q-1}(L^+),\quad (2)$$

而且

$$i^+_{q*}=i_{q*},\quad j^+_{q*}=j_{q*},\quad \partial^+_{q*}=\partial_{q*},\quad q>0.\quad (3)$$

在 $q=-1$ 时，式(2)中的前三个群都是零群，根据命题 5.1 与 5.2；$\partial^+_{-1*}=0$，根据式(1)的 $\partial_{-1}=0$；而且 $H_{-2}(L^+)$ 理解为零群. 所以，

如果写出 (K^+, L^+) 的下同调群的序列，我们就不必写出 $q=-1$ 的那些项；而且根据命题 5.1 与 5.2 以及式(3)，这序列如下：

$$0 \to H_n(L) \xrightarrow{i_*} H_n(K) \xrightarrow{j_*} H_n(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(L) \to \cdots$$
$$\to H_{q+1}(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_q(L) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \to \cdots$$
$$\to H_1(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_0(L^+) \xrightarrow{i_*^+} H_0(K^+) \xrightarrow{j_*^+} H_0(K, L) \to 0. \tag{4}$$

这序列叫作 (K, L) 的**增广下同调序列**. 它与 (K, L) 的下同调序列（§4 中的式(5)）有相等的项数.

同样地，有 (K, L) 的**增广上同调序列**：

$$0 \leftarrow H^n(L) \xleftarrow{i^*} H^n(K) \xleftarrow{j^*} H^n(K, L) \xleftarrow{\delta^*} H^{n-1}(L) \leftarrow \cdots$$
$$\leftarrow H^{q+1}(K, L) \xleftarrow{\delta^*} H^q(L) \xleftarrow{i^*} H^q(K) \xleftarrow{j^*} H^q(K, L) \leftarrow \cdots$$
$$\leftarrow H^1(K, L) \xleftarrow{\delta^*} H^0(L^+) \xleftarrow{i_+^*} H^0(K^+) \xleftarrow{j_+^*} H^0(K, L) \leftarrow 0. \tag{4c}$$

5.3 定理　设 K 是 n 维复形，而且 L 是 K 的非空子复形. (K, L) 的增广下同调序列(4)与增广上同调序列(4c)都具有恰当性. ▌

因为命题 5.1 中非空复形 K 与增广复形 K^+ 的零维同调群之间的关系，本定理比定理 4.4 与 4.4c 更加明确.

例 5.2　把以 a 为顶点、以复形 L 为底的锥形 K 改记作 $a\circ L$. 则

$$\partial_*: H_q(a\circ L, L) \approx H_{q-1}(L^+), \quad \delta^*: H^{q-1}(L^+) \approx H^q(a\circ L, L), \quad q \geqslant 0.$$

证　明　当 $q\neq 0$，应用例 5.1 与定理 5.3；当 $q=0$，还再用命题 5.1 中的 $H_{-1}(L^+)=H^{-1}(L^+)=0$. ▌

这结果在 L 是空的子复形时仍成立，因为命题 5.1 中的 $H_{-1}(L^+)$，$H^{-1}(L^+)\approx J$.

相对同调群化作绝对同调群　例 5.2 只说明一对特别的复形

$(a\circ L, L)$ 的同调群能按一定方式化作一个增广复形 L^+ 的同调群. 现在考虑任意一对复形 (K, L). 设 K 是 N 维单形 $\underline{s}^N$ 的一个子复形. 然后 $K\cup a\circ L$ 是 $N+1$ 维单形 $a\underline{s}^N$ 的一个子复形. 把 $K\cup a\circ L$ 的增广复形记作 $K^+\cup a\circ L$. 我们来证明 (K, L) 的同调群能化作 $K^+\cup a\circ L$ 的同维的同调群.

5.4 定理 对于任意一对复形 (K, L),

$$H_q(K, L)\approx H_q(K^+\cup a\circ L),$$
$$H^q(K, L)\approx H^q(K^+\cup a\circ L), \quad q\geqslant 0.$$

证 明 考虑一对复形 $(K\cup a\circ L, a\circ L)$. 复形 $K\cup a\circ L$ 中的开星形 $\mathrm{St}a=a\circ L-L$, 是 $a\circ L$ 的一个开子复形. 根据定理 3.4 与那里的附记,

$$H_q(K, L)\approx H_q(K\cup a\circ L, a\circ L),$$
$$H^q(K, L)\approx H^q(K\cup a\circ L, a\circ L).$$

因为 $a\circ L$ 是锥形, 应用例 5.1 与 $(K\cup a\circ L, a\circ L)$ 的定理 5.3, 就得到

$$H_q(K\cup a\circ L, a\circ L)\approx H_q(K^+\cup a\circ L),$$
$$H^q(K\cup a\circ L, a\circ L)\approx H^q(K^+\cup a\circ L). \ ▌$$

附 记 设 (K, L) 与 (K', L') 是两对复形, 而且 $\varphi: K\to K'$ 是同胚, 使得 $\varphi|L: L\to L'$ 也是同胚. 我们就说 $\varphi: (K, L)\to(K', L')$ 是同胚. 根据本定理, 我们立刻能从绝对同调群的拓扑不变性推出 (K, L) 与 (K', L') 的同维同调群同构. 在这意义下, 我们说, 相对同调群是拓扑不变性. 再者, 还能从绝对上下同调群之间的关系推出相对上下同调群之间的关系.

通过相对同调群来计算 $\dot{\underline{s}}^n\circ L$ 的绝对同调群 我们应用前一定理与它的证法, 来计算一种复形 $\dot{\underline{s}}^n\circ L$ 的同调群. 首先, 我们定义两个复形 K 与 L 的**统联** $K\circ L$, 作为锥形的一种推广. 设

给定的两个复形 K 与 L 无公共顶点，而且对于 K 的任一单形 $\underline{s}=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 与 L 的任一单形 $\underline{t}=(b^0, b^1, \cdots, b^r)$，

$$\underline{st}=(a^0, a^1, \cdots, a^q, b^0, b^1, \cdots, b^r)$$

是一个单形. 例如，K 与 L 是一个适当高维的单形的、无公共顶点的两个子复形. 如果 $K=\{\underline{s}_i\}$, $L=\{\underline{t}_j\}$，它们的统联就是

$$K\circ L=\{\underline{s}_i\}\cup\{\underline{t}_j\}\cup\{\underline{s}_i\underline{t}_j\}.$$

容易看出，它是一个复形；而且如果这两个复形中的一个是空的，则统联就是另一个复形. 为简便起见，它的增广复形记作 $K\circ L^+$.

现在我们只限于讨论 $\dot{\underline{s}}^n\circ L$. $\dot{\underline{s}}^1\circ L$ 叫作以 L 为底的**双角锥**；例如 n 维欧几里得空间 E^n 中的 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1$ 是 E^{n-1} 中的 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{n-1}|=1$ 的双角锥. 后面“环绕复形”的讨论将牵涉到 $\dot{\underline{s}}^n\circ L$.

5.5 命题 $H_q(\dot{\underline{s}}^n\circ L^+)\approx H_{q-n}(L^+)$,

$H^q(\dot{\underline{s}}^n\circ L^+)\approx H^{q-n}(L^+)$, $q\geqslant 0$.

证 明 设 $\underline{s}^n=(a^0, a^1, \cdots, a^n)$. 记

$$\underline{s}^{n-1}=(a^0, a^1, \cdots, a^{n-1}).$$

明显地有

$$\dot{\underline{s}}^n=\mathrm{Cl}\,\underline{s}^{n-1}\cup a^n\circ\dot{\underline{s}}^{n-1},$$

$$\dot{\underline{s}}^n\circ L^+=(\mathrm{Cl}\,\underline{s}^{n-1}\cup a^n\circ\dot{\underline{s}}^{n-1})\circ L^+. \tag{5}$$

把 $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^{n-1}\circ L$, $\dot{\underline{s}}^{n-1}\circ L$, a^n 分别作为定理 5.4 中的 K, L, a, 因而根据式(5) $\dot{\underline{s}}^n\circ L$ 是那里的 $K\cup a\circ L$; 因而定理 5.4 给出

$$H_q(\mathrm{Cl}\,\underline{s}^{n-1}\circ L, \dot{\underline{s}}^{n-1}\circ L)\approx H_q(\dot{\underline{s}}^n\circ L^+). \tag{6}$$

因为 $\mathrm{Cl}\,\underline{s}^{n-1}\circ L$ 是锥形，例 5.1 与定理 5.3 给出

$$\partial_*: H_q(\mathrm{Cl}\,\underline{s}^{n-1}\circ L, \dot{\underline{s}}^{n-1}\circ L)\approx H_{q-1}(\dot{\underline{s}}^{n-1}\circ L^+).$$

式(6)与上式给出所求证的结果. ▌

本命题有一些值得提出的特例，例如 $n=1$，或 L 是空的，或 $L=\dot{\underline{s}}^n$.

环绕复形·局部同调群 这两个概念都是在§7中定义闭组合流形时所需要的. 但上面的统联概念以及命题5.5与其证明很自然地引出这两个概念.

我们考虑任一复形 K. 设 $\underline{s}^p$ 是 K 的任一单形. K 中的以 $\underline{s}^p$ 为面的每一个单形都可写成 $\underline{s}^p\underline{t}$ 的形式, 这里 $\underline{t}$ 是 K 的一个单形或空的. (t 是空的时, $\underline{s}^p\underline{t}$ 就是 $\underline{s}^p$.) $\underline{s}^p$ 在 K 中的闭星形 $\mathrm{St}\,\underline{s}^p$ 是由全体这种 $\underline{s}^p\underline{t}$ 及其面所组成的; 它是 K 的一个子复形. 用 $(\mathrm{St}\,\underline{s}^p)^{\cdot}$ 表示 $\mathrm{St}\,\underline{s}^p$ 中的、不以 $\underline{s}^p$ 为面的单形的集合; 它也是 K 的一个子复形. 容易看出, $\mathrm{St}\,\underline{s}^p$ 中的、上文所说的单形 $\underline{t}$ 的集合, 是一个复形, 是 K 的一个子复形, 叫作 $\underline{s}^p$ 在 K 中的**环绕复形**, 记作 $\mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$:

$$\mathrm{Lk}\,\underline{s}^p=\{\underline{t}\mid \underline{s}^p\underline{t}\in \mathrm{St}\,\underline{s}^p\}=\{\underline{t}\mid \underline{s}^p\underline{t}\in K\}. \tag{7}$$

(建议读者取特殊的 K, 求出 $\mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$.) 从定义, 立刻有

5.6 命题 $\mathrm{St}\,\underline{s}^p=\mathrm{Cl}\,\underline{s}^p\circ \mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$, $(\mathrm{St}\,\underline{s}^p)^{\cdot}=\dot{\underline{s}}^p\circ \mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$. ▌

然后从式(6)与命题5.5, 得到下述命题.

5.7 命题 $H_q(\mathrm{St}\,\underline{s}^p,\ (\mathrm{St}\,\underline{s}^p)^{\cdot})\approx H_{q-p-1}(\mathrm{Lk}^+\underline{s}^p)$,

$H^q(\mathrm{St}\,\underline{s}^p,\ (\mathrm{St}\,\underline{s}^p)^{\cdot})\approx H^{q-p-1}(\mathrm{Lk}^+\underline{s}^p)$. ▌

例5.2是 $p=0$ 时的本命题. 本命题中的 $(\mathrm{St}\,\underline{s}^p,\ (\mathrm{St}\,\underline{s}^p)^{\cdot})$ 的同调群, 对于一般的复形 K, 表出 K 的、在 $\underline{s}^p$"附近的"同调性质. 事实上, 设 x 是多面体 $|K|$ 的任一点, 而且 $\mathrm{Car}_K\,x=\underline{s}^p$. 把 $(\mathrm{St}\,\underline{s}^p,\ (\mathrm{St}\,\underline{s}^p)^{\cdot})$ 的同调群叫作 K 的在点 x 处的**局部同调群**, 记作 $H_q^K(x)$ 与 $H_K^q(x)$:

$$H_q^K(x)=H_q(\mathrm{St}\,\underline{s}^p,\ (\mathrm{St}\,\underline{s}^p)^{\cdot}),$$

$$H_K^q(x)=H^q(\mathrm{St}\,\underline{s}^p,\ (\mathrm{St}\,\underline{s}^p)^{\cdot}).$$

下面的定理能够证明, 但本书中不证.

5.8 定理 复形 K 在它的任一点 $x(\in|K|)$ 处的局部同调群 $H_q^K(x)$ 与 $H_K^q(x)$ 是 K 的拓扑不变性. ▌

习　题

1．试补出命题 5.1 关于上同调部分的证明．

2．试证定理 5.3 关于下同调的部分．

3．设复形 K 是它的两个零调的子复形 K_1 与 K_2 的并集：$K=K_1\cup K_2$．命 $K'=K_1\cap K_2$．试证：

1)
$$\chi(K)+\chi(K')=\chi(K_1)+\chi(K_2);$$
这里的 χ 表示 Euler-Poincaré 示性数；

2) $H_q(K'^+)\approx H_{q+1}(K^+)$，　$H^q(K'^+)\approx H^{q+1}(K^+)$，　$q\geqslant 0$．

4．试证定理 5.4 后的附记中所说的相对同调群的拓扑不变性．

5．设 x 是复形 K 的一点，但不是 K 的一个顶点，而且设 $\underline{s}^p$ 是 $\mathrm{Car}_K x$．引进 x 作为唯一的一个新顶点，用 x 与 K 的顶点把 K 重分(非重心重分) K 为复形 K'．试证：

$$H_q^{K'}(x)\approx H_q^K(x).$$

6．块 形 剖 分

各种整同调群的计算，都可以化作整下同调群的计算．从多面体的同调群计算的角度看，复形或多面体的单纯剖分是不方便的；例如环面的单纯剖分就至少有 7 个顶点，21 条棱与 14 个三角形(参看 III§5 中的习题 4 与例 III．4.3)．早期的拓扑学文献中，就常常考虑多面体的凸胞腔(凸多边形及其高维的推广)剖分，不限于单纯剖分．本节则仍从复形 K 出发，把 K 的单形适当地聚集起来，作成较少个数的各维块形(用到相对同调群的概念)，得到 K 的块形剖分．然后证明在计算 K 的整下同调群时，能用块形剖分来替代单纯剖分．最后计算 n 维的射影空间的整下同调群，作为块形剖分的应用．

下一节还将见到块形剖分在流形理论方面的应用．

块形剖分　设 K 是一个 n 维复形．设

$$B(K)=\{\sigma_i^p\},\quad p=0,\ 1,\ \cdots,\ n,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ \beta_p(\geqslant 0)$$

是 K 的一族子复形，σ_i^p 是 p 维的(因而非空)，而且所有子复形的并集即 K：$\bigcup \sigma_i^p \supset K$. 命

$$B^p(K)=\bigcup_{r\leqslant p} \sigma_j^r,\qquad \dot{\sigma}_i^p=\sigma_i^p \cap B^{p-1}(K),$$

这里的和号 $\bigcup$ 是对于所有的 $r\leqslant p$ 与所有的 j 展开的；它们也都是 K 的子复形. 设 $B(K)$ 还满足下列三个条件:

1) 族 $B(K)$ 中两个不同的 p 维成员无公共的 p 维单形，

2) 族 $B(K)$ 中任意两个成员的交是族中的一些成员的并集，或者是空集，

3) $H_q(\sigma_i^p,\ \dot{\sigma}_i^p)$ 是无穷循环群或零群，按照 $q=p$ 或 $q\neq p$.

这时候，$B(K)$ 叫作 K 或多面体 $|K|$ 的一个**块形剖分**. σ_i^p 叫作 p 维**块形**，$B^p(K)$ 叫作 p 维**骨架**，$\dot{\sigma}_i^p$ 叫作 σ_i^p 的**边缘**，$\sigma_i^p-\dot{\sigma}^p$ 叫作**开块形**.

前两个条件是关于块形的规则相处，第三个是关于块形的同调性质. 复形 K 这单纯剖分是 K 的一个特殊的块形剖分.

例 6.1 设 K 是例 III.4.3 中的环面的单纯剖分. 取 K 为 σ^2，边 AB 上的全体单形为 σ_1^1，边 AA' 上的全体单形为 σ_2^1，顶点 A 为 σ^0；它们组成 K 的一个块形剖分.

设 K 是二维球的八面形剖分. 取南北两半球为 σ_1^2 与 σ_2^2，赤道在东西两半球的部分为 σ_1^1 与 σ_2^1，σ_1^1 与 σ_2^1 的两个交点为 σ_1^0 与 σ_2^0；它们组成 K 的一个块形剖分.

设 K 是 n 维单形. 取 K 为唯一的一个 σ^n，K 的一个顶点为唯一的一个 σ^0；它们组成 K 的一个块形剖分.

设 K 是 n 维球的单纯剖分. 取 K 为唯一的一个 σ^n，K 的一个顶点为唯一的一个 σ^0；它们组成 K 的一个块形剖分.

这些例子还说明，块形剖分可以有与单形剖分不同的性质. 例如一个块形可以不是零调的，p 维块形的边缘的维数可以小于 $p-1$，两个相交块形的交可以不只是一个块形. 还须注意，$B^p(K)$ 虽然是由 $B(K)$ 中所有不大于 p 维的块形组成的，但不必是由 K 中所有不大于 p 维的单形组成的.

现在列举有关块形的边缘、块形的交、与骨架的一些性质，作为下述的命题.

6.1 命题　(i) $\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 是一些低于 p 维的块形的并集，而且是否空集，按照 $p=0$ 或 $p>0$.

(ii) $\underline{\sigma}_i^p\cap\underline{\sigma}_j^p\subset\dot{\underline{\sigma}}_i^p\cap\dot{\underline{\sigma}}_j^p$, $i\neq j$;　$\underline{\sigma}_i^p\cap\underline{\sigma}_j^r\subset\dot{\underline{\sigma}}_i^p$, $r<p$.

(iii) $B^p(K)-(\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p)$ 是 K 的一个子复形.

证　明　(i) $\dot{\underline{\sigma}}_i^p=\underline{\sigma}_i^p\cap B^{p-1}(K)=\bigcup(\underline{\sigma}_i^p\cap\underline{\sigma}_j^r)$, 这里的和号 $\bigcup$ 是对于所有的 $r<p$ 与所有的 j 展开的；然后条件 2) 与块形维数的定义给出(i)的第一个结论. 边缘的定义或条件 3)(对于 $q=0$)分别给出(i)的第二个结论的两部分.

(ii) 根据条件 1) 与块形维数的定义，$\underline{\sigma}_i^p\cap\underline{\sigma}_j^p$ 是不大于 $p-1$ 维的子复形. 然后条件 1) 与 2) 以及块形维数的定义给出 $\underline{\sigma}_i^p\cap\underline{\sigma}_j^p\subset B^{p-1}(K)$. 这蕴涵

$$\underline{\sigma}_i^p\cap\underline{\sigma}_j^p\subset(\underline{\sigma}_i^p\cap B^{p-1}(K))\cap(\underline{\sigma}_j^p\cap B^{p-1}(K))=\dot{\underline{\sigma}}_i^p\cap\dot{\underline{\sigma}}_j^p.$$

从 $\underline{\sigma}_j^r\subset B^{p-1}(K)$, 我们得到第二个结论.

(iii) 因为 $B^p(K)-(\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p)=\bigcup\underline{\sigma}_j^r$, 这里的和号 $\bigcup$ 是对于所有 $r<p$ 时的所有 j, 以及 $r=p$ 时的所有的 $j\neq i$ 展开的. ▌

设 $B(K)=\{\underline{\sigma}_i^p\}$ 是复形 $K=\{s_i^q\}$ 的一个块形剖分. 由于块形 $\underline{\sigma}_i^p$ 维数 p 的定义与条件 3)，一对复形 $(\underline{\sigma}_i^p, \dot{\underline{\sigma}}_i^p)$ 的 p 维闭链群是

$$Z_p(\underline{\sigma}_i^p, \dot{\underline{\sigma}}_i^p)=H_p(\underline{\sigma}_i^p, \dot{\underline{\sigma}}_i^p)\approx J.$$

因而 $Z_p(\underline{\sigma}_i^p, \dot{\underline{\sigma}}_i^p)$ 有两个生成元，一个是另一个乘上 -1. 块形 $\underline{\sigma}_i^p$ 通过 $Z_p(\underline{\sigma}_i^p, \dot{\underline{\sigma}}_i^p)$ 决定这两个生成元，就如同一个单形 s_i^q 决定两个有向单形 $\pm s_i^q$ 一样. 把这两个生成元中的一个记作 σ_i^p, 叫作相应于 $\underline{\sigma}_i^p$ 的一个**有向块形**. σ_i^p 是 $\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 上的一个 p 维**单纯链**(即单形所组成的链)；而且从生成元 σ_i^p 的定义，单纯边缘链 $\partial\sigma_i^p$ 是在 $\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 上的一个 $p-1$ 维的单纯链，因而它们都是 K 上的单纯链，这里的

∂ 是 K 上的下边缘算子.

例 **6.2** 复形 $K=\{s_i^q\}$ 的重心重分 SdK 的块形剖分 $B=\{Sd\underline{s}_i^p\}$. 这剖分 B 显然满足条件 1); 而且根据 IV § 3 中的式(1),

$$(Sd\underline{s}_i^p)^{\cdot}=Sd\dot{\underline{s}}_i^p,$$

因而 B 也满足条件 2). B 也满足条件 3), 已见例 3.2. 再根据 IV § 3 中的式 $(8)_q$, 有

$$\partial Sd_p s_i^p=Sd_{p-1}\partial s_i^p;$$

这就说明

$$Sd_p s_i^p\in Z_p(Sd\underline{s}_i^p,\ Sd\dot{\underline{s}}_i^p)=H_p(Sd\underline{s}_i^p,\ Sd\dot{\underline{s}}_i^p),$$

是块形 $Sd\underline{s}_i^p$ 的相应的有向块形.

对于给定的 $B(K)$, 以整数为系数的、诸 σ_i^p 的任一线性组合叫作 K 上的一个**块形链**. 一个块形链当然也是 K 上的一个单纯链; 但反之, 一个单纯链明显地不必是一个块形链. 下面的引理将引导我们确定单纯闭链的同调类中的块形链; 证明的方法可以说仍是 III § 4 各例中的"挤到边上去"的方法, 现在的边当然指的是 $\dot{\sigma}_i^p$. 在下面的引理中, 记号链 $x\subset$ 复形 L, 指的是 x 在 L 上; 记号链 $x\sim$ 链 y, 指的是 $x\sim y$ 在 K 上.

6.2 引理 设 $B(K)=\{\underline{\sigma}_i^p\}$ 是复形 $K=\{s_i^q\}$ 的一个块形剖分.

(i) 如果单纯链 $c_q\in C_q(K)$, 而且 $\partial c_q\subset B^{q-1}(K)$, 则存在一个 q 维单纯链 $d_q\subset B^q(K)$, 使得 $c_q-d_q\sim 0$, 因而

$$\partial d_q=\partial c_q\subset B^{q-1}(K).$$

(ii) 如果单纯链 $c_q\subset B^q(K)$, 而且 $\partial c_q\subset B^{q-1}(K)$, 则 c_q 是一个块形链.

(iii) 如果单纯链 $c_q\in C_q(K)$, 而且 $\partial c_q\subset B^{q-1}(K)$, 则存在一个 q 维块形链 $d_q\subset B^q(K)$, 使得 $c_q-d_q\sim 0$.

证 明 先从(i)与(ii)来证明(iii). (i)与(iii)的假设是相同的, 所以根据(i), 存在具有(i)的结论中的链 d_q. 这个链 d_q 现在

又满足(ii)的关于链 c_q 的假设，所以根据(ii)，d_q 是一个块形链. 这就证明了(iii)是(i)与(ii)的推论.

现在来证明(i). 首先，我们要把满足(i)的假设的单纯链 c_q 挤到边上去. 因为块形 $\underline{\sigma}_i^p$ 是 K 的 p 维子复形以及 $B(K)$ 的成员全体盖满 K，存在这样的整数 $p \geqslant q$，使得

$$c_q \subset B^p(K),$$

这里的 $B^p(K)$ 是 K 的 p 维子复形. 这蕴涵任一个 $p+1$ 维的开块形 $\underline{\sigma}_j^{p+1}-\dot{\underline{\sigma}}_j^{p+1}$ 都不包含 c_q 中的一个单形(即在 c_q 中出现的、具有非零系数的有向单形). 但 p 维的开块形 $\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 却未必如此；我们就是要把 c_q 在 $\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 中的部分挤到边缘 $\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 上去(图 8).

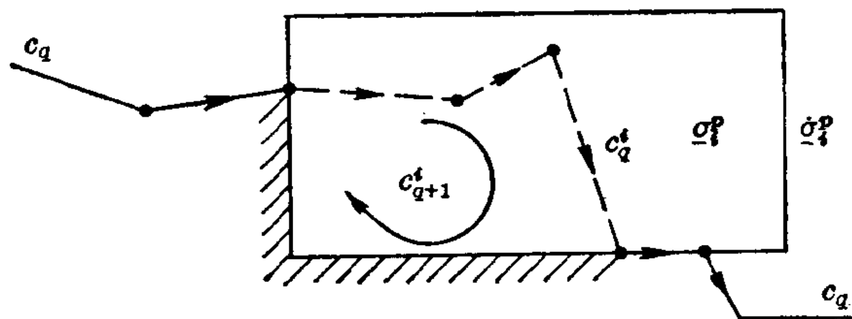


图　8

为着给出 c_q 在 $\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 中的部分，考虑 K 的一对子复形 $(B^p(K),\ B^p(K)-(\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p))$(参看命题 6.1(iii))；这一对复形的差当然是 K 的开子复形 $\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p$. 然后所求的 c_q 的部分是

$$c_q^i = jc_q,$$

这里的 j 是 § 4 中定义的

$$C_q(B^p(K)) \xrightarrow{j} C_q(\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p)$$
$$=C_q(B^p(K),\ B^p(K)-(\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p)).$$

剩下要作的是把 c_q^i 挤到边缘 $\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 上去. 根据命题 4.2，$\hat{\partial} c_q^i = \hat{\partial} jc_q = j\partial c_q$. 由于假设，$\partial c_q \subset B^{q-1}$；因而 $j\partial c_q = (\partial c_q)_{\underline{\sigma}_i^p-\dot{\underline{\sigma}}_i^p} = 0$. 于是 $\hat{\partial} c_q^i = 0$，即

$$c_q^i \in Z_q(\underline{\sigma}_i^p - \dot{\underline{\sigma}}_i^p) = Z_q(\underline{\sigma}_i^p, \dot{\underline{\sigma}}_i^p). \tag{1}$$

如果 $p>q$, 式(1)与块形剖分的条件 3) 说明, 存在 $c_{q+1}^i \in c_{q+1}(\underline{\sigma}_i^p, \dot{\underline{\sigma}}_i^p)$, 使得 $c_q^i = \hat{\hat{c}} c_{q+1}^i = (\partial c_{q+1}^i)_{\underline{\sigma}_i^p - \dot{\underline{\sigma}}_i^p}$; 因而 $c_q^i - \partial c_{q+1}^i \subset \dot{\underline{\sigma}}_i^p$. 这时候, $c_q^i - (c_q^i - \partial c_{q+1}^i) \sim 0$; 把 c_q^i 换作 $c_q^i - \partial c_{q+1}^i$, 就是把 c_q^i 挤到边缘 $\dot{\underline{\sigma}}_i^p$ 上去.

如果 $p>q$, 命

$$c_q' = c_q - \sum_i \partial c_{q+1}^i;$$

因而有

$$c_q' - c_q \sim 0, \quad c_q' \subset B^{p-1}(K).$$

把 c_q 换成 c_q', 就是把 $B^p(K)$ 上的 c_q 挤到 $B^{p-1}(K)$ 上去, 挤成 c_q'.

如果 $p-1$ 还大于 q, 则把 c_q' 再挤到边上去; 继续应用这方法,就得到(i)的结论中的单纯链 d_q.

现在来证明(ii), 设 c_q 满足(ii)的假设. 还用 c_q^i 记 c_q 在 $\underline{\sigma}_i^q - \dot{\underline{\sigma}}_i^q$ 的部分. 由于式(1), 块形剖分的条件 3) 以及 σ_i^q 的定义, $c_q^i = m_i \sigma_i^q$, m_i 是一整数. 因而

$$c_q - \sum_i m_i \sigma_i^q \subset B^{q-1}(K).$$

但 $B^{q-1}(K)$ 无 q 维单形,所以

$$c_q = \sum_i m_i \sigma_i^q. \quad]$$

6.3 推论 (i) $\partial \sigma_i^q$ 是一个块形链 $\sum_j m_{ij} \sigma_j^{q-1}$. 因而每一个块形链的单纯边缘是一个块形链.

(ii) 任一单纯闭链～一个块形闭("闭"指的是单纯边缘是零)链.

(iii) 如果一个块形链是一个单纯链的单纯边缘,它必也是一个块形链的单纯边缘.

证 明 (i) 在定义 σ_i^q 时, 已说明 $\partial \sigma_i^q \subset \dot{\underline{\sigma}}_i^q$; 因而根据命题

6.1(i)，$\partial\sigma_i^q\subset B^{q-1}(K)$. 再者 $\partial(\partial\sigma_i^q)=0\subset B^{q-2}(K)$. 把引理 6.2(ii) 应用到 $\partial\sigma_i^q$，就得到这里的结论.

(ii) 设 z_q 是任一单纯闭链. $\partial z_q=0\subset B^{q-1}(K)$. 把引理 6.2(iii) 应用到 z_q，就得到这里的结论.

(iii) 设一个块形链 $\sum m_i\sigma_i^q=\partial c_{q+1}$，$c_{q+1}\in C_{q+1}(K)$；这就是说，$\partial c_{q+1}\subset B^q(K)$. 把引理 6.2(iii) 应用到 c_{q+1}，存在一个 $q+1$ 维的块形链 $\sum n_i\sigma_i^{q+1}\sim c_{q+1}$；因而 $\partial(\sum n_i\sigma_i^{q+1})=\partial c_{q+1}=\sum m_i\sigma_i^q$. ∎

现在只剩下用群论的术语，来表达出本节的主要目的(定理 6.4). 首先，块形链有唯一的线性组合表示. 事实上，根据块形剖分的条件 1)，$\sum m_i\sigma_i^p=0$，当而且只当所有的 $m_i=0$. 因而有以 $\{\sigma_i^p\}$ 为生成元的 p 维块形链群，记作 $C_q(B(K))$. 根据推论 6.3(i)，得块形边缘算子

$$\partial^B:C_q(B(K))\to C_{q-1}(B(K)).$$

然后定义

$$Z_q(B(K))=\partial_q^B\text{ 核},\quad B_q(B(K))=\partial_{q+1}^B\text{ 象},$$

而且从 $C_q(B(K))\supset Z_q(B(K))\supset B_q(B(K))$，定义块形下同调群

$$H_q(B(K))=Z_q(B(K))/B_q(B(K)).$$

其次，定义同态

$$i:C_q(B(K))\to C_q(K).$$

一个块形链的 i 象是这链表出的单纯链. 然后明显地有 $i\partial_q^B=\partial_q i$；因而 i 诱导出同态

$$i_*:H_q(B(K))\to H_q(K). \tag{2}$$

6.4 定理 式(2)中的同态是同构.

证 明 推论 6.3(ii) 说，每一个单纯同调类包含一个块形闭链，即 i_* 是满同态. 推论 6.3(iii) 说，如果一个块形闭链不是另

一个块形链的边缘，则它也不是一个单纯链的边缘，即 i_* 是单一同态. ▌

本定理在任意系数群时仍成立，而且证明完全是一样的. 它说明了能用复形 K 的块形剖分来计算 K 的下同调群. 把本定理中的 $B(K)$ 看作是 SdK 的 $B=\{Sds_i^q\}$(参看例6.2)，就得到同调群的重分不变性(定理 IV. 4.3).

例 6.3 读者可计算例6.1中第一个与第三个块形剖分的下同调群. 第二个是下一例的特例.

例 6.4 n 维球 S^n 的八面形式剖分(参看 III §1 末尾与图 III. 4) 的块形剖分. 本例是为着下一例作准备的.

欧几里得空间 E^{n+1} 中由方程

$$|x_0|+|x_1|+\cdots+|x_n|=1$$

确定的子集是 n 维的"八面形"，也是一个 n 维球 S^n. 它共有 2^n 个 n 维单形，对于原点对称.

把 x_r 轴上坐标为 $+1$, -1 的点分别记作 a_+^r, a_-^r. 命 $K^0=\{a_+^0,\ a_-^0\}$, $K^r=\{a_+^r,\ a_-^r\}\circ K^{r-1}$, $r=1, 2, \cdots, n$, 即 K^r 是 K^{r-1} 的双角锥. K^n 是 S^n 的八面形式(单纯)剖分，而且 K^r 也是 S^r: $|x_0|+|x_1|+\cdots+|x_r|=1$ 的八面形式剖分. 这个剖分的特点是 K^n 的对径映射

$$f:(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n+1})\to(-x_1,\ -x_2,\ \cdots,\ -x_{n+1})$$

不但是拓扑映射，而且是单纯映射. 如果 z_r 是 K^r 的一个基本闭链*)，则它的在单纯链映射 f 下的象

$$f(z_r)=(-1)^{r+1}z_r.$$

这是因为，K^r 的对径映射是(对于 $q+1$ 个坐标平面的) $r+1$ 个镜面反射的积，而每一个镜面反射改变 K^r 的定向.

命

$$K_+^r=a_+^r\circ K^{r-1},\quad K_-^r=a_-^r\circ K^{r-1}.$$

$B(K^n)=\{K_+^r,\ K_-^r\}$, $r=0, 1, \cdots, n$, 明显地是 K^n 的一个块形剖分. (根据 §5 中习题 4，块形剖分的条件 3) 满足.) 现在进一步归纳地选取与 $K_\pm^r$ 相

---

*) IV §6.4 中只定义了 $n(\geqslant 1)$ 维闭假流形的基本闭链. 现在 $K^0=\{a_+^0,\ a_-^0\}$ 只是两个点；我们把 $a_+^0-a_-^0$ 与 $-a_+^0+a_-^0$ 叫作 K^0 的两个基本闭链.

应的有向块形 $\sigma_{\pm}^r$ 如下. 取 $\sigma_{\pm}^0=a_{\pm}^0$. 明显地有 $f(\sigma_{\pm}^0)=\sigma_{\mp}^0$, 而且 $z_0=a_+^0-a_-^0$ 是 K^0 的一个基本闭链. 设已取定与 $K_{\pm}^r$ 相应的有向块形 $\sigma_{\pm}^r$, 使得

$$f(\sigma_{\pm}^r)=\sigma_{\mp}^r,$$

而且使得

$$\partial\sigma_+^r=\sigma_+^{r-1}+(-1)^r\sigma_-^{r-1}=z_{r-1},\quad \partial\sigma_-^r=(-1)^r\partial\sigma_+^r=(-1)^r z_{r-1}. \tag{3}$$

然后

$$z_q=\sigma_+^r+(-1)^{r+1}\sigma_-^r$$

明显地是 K^r 的一个基本闭链.

现在选取有向块形

$$\sigma_+^{r+1}=a_+^{r+1}(\sigma_+^r+(-1)^{r+1}\sigma_-^r)=a_+^{q+1}z_r,$$

$$\sigma_-^{r+1}=f(\sigma_+^{r+1})=(-1)^{r+1}a_-^{r+1}z_r.$$

容易看出(§2中式(9)),

$$\partial\sigma_+^{r+1}=\sigma_+^r+(-1)^{r+1}\sigma_-^r=z_r,\quad \partial\sigma_-^{r+1}=(-1)^{r+1}\partial\sigma_+^r=(-1)^{r+1}z_r;$$

因而

$$z_{r+1}=\sigma_+^{r+1}+(-1)^{r+2}\sigma_-^{r+1}$$

是 K^{r+1} 的一个基本闭链. 这就归纳地完成了有向块形的选取.

以上说明了 K^n 的块形剖分 $B(K^n)$ 的有向块形的一个基本组是 $\{\sigma_+^r, \sigma_-^r\}$, $r=0, 1, \cdots, n$. 根据边缘公式(3)(其中 $z_{-1}=0$), 立刻可以计算出 $B(K^n)$ 的闭链群 Z_q, 边缘链群 B_q 与同调群如下. Z_0 的生成元是 σ_+^0 与 σ_-^0, 也可以改为 σ_+^0 与 z_0, Z_r 的生成元是 z_r, $r=1, 2, \cdots, n$. B_r 的生成元是 z_r, $r=0, 1, \cdots, n-1$, B_n 的生成元是 0. 于是 $H_r\approx J$, 当 $r=0, n$; 而 $H_r=0$, 当 $r\neq 0, n$.

例 6.5　n 维射影空间 P^n 的整下同调群. 我们把 P^n 看作是由迭合例 6.4 中的 S^n 的每对对径点 x, $f(x)$ 成一点 y 而得到的空间. 把这迭合记作 p, 并记 $P^n=p(S^n)$. K^n 的迭合 $p(K^n)$ 不是单纯复形, 但 SdK^n 的迭合 $p(SdK^n)$ 是单纯复形. 为方便起见, 把后者记作 L^n; 而且一般地记

$$L^r=pSdK^r=pSdK_+^r=pSdK_-^r,\quad r=0, 1, \cdots, n.$$

L^r 是 P^r 的单纯剖分, 因而 P^q 是多面体. 不难看出, 跟 SdK^r 一样, L^r 是闭假流形.

如同 $B(K^n)$ 是 K^n 的一个块形剖分,

$$B(SdK^n)=\{SdK_+^r, SdK_-^r\},\quad r=0, 1, \cdots, n,$$

是 SdK^n 的一个块形剖分. 因而特别有

$$H_q(SdK_+^r, (SdK_+^r)^\cdot) = H_q(SdK_+^r, SdK^{r-1})$$
$$\approx J \text{ 或} = 0, \text{ 按照 } q = r \text{ 或 } q \neq r.$$

现在考虑 $B(L^n) = \{L^r\}$, $r = 0, 1, \cdots, n$. 因为两个开子复形 $SdK_+^r - SdK^{r-1}$ 与 $L^r - L^{r-1}$ 同构(参看定理 III. 1.10 前的定义),直接从相对同调群的定义看出

$$H_q(L^r, L^{r-1}) \approx H_q(SdK_+^r, SdK^{r-1}).$$

所以 $B(L^r)$ 是 L^r 的或 P^n 的一个块形剖分. 把相应于 L^r 的有向块形记作 τ^r, 则

$$\tau^r = pSd\sigma_+^r = pSd\sigma_-^r,$$
$$\partial\tau^r = p\partial Sd\sigma_+^r = p\partial Sd\sigma_-^r.$$

于是根据 $B(K^n)$ 的边缘公式(3), 得到 $B(L^n)$ 的下述边缘公式:

$$\partial\tau^r = \begin{cases} 0, & \text{当 } r \text{ 是 0 或奇数}, \\ 2\tau^{r-1}, & \text{当 } r \text{ 是正偶数}. \end{cases}$$

把 $B(L^n)$ 的闭链群与边缘链群分别记作 Z_q 与 B_q. 根据边缘公式, 立刻得出: 当 $q=0$, 奇数 $<n$, 或奇数 n, Z_q 以 τ^q 为生成元; 当 $q=$ 正偶数 $\leqslant n$, $Z_q = 0$. 当 $q=0$, 或奇数 n, $B_q = 0$; 当 $q=$ 奇数 $<n$, B_q 以 $2\tau^q$ 为生成元. 于是有下述定理.

6.5 定理 P^n 的整下同调群如下:

$$H_0(P^n) \approx J; \ H_{2q}(P^n) = 0, \ 0 < 2q \leqslant n;$$
$$H_{2q-1}(P^n) \approx J_2, \ 0 < 2q-1 < n;$$
$$H_n(P^n) \approx J, \text{ 当 } n \text{ 是奇数}.$$

再者,

$$H^0(P^n) \approx J; \ H^{2q}(P^n) \approx J_2, \ 0 < 2q \leqslant n;$$
$$H^{2q-1}(P^n) = 0, \ 0 < 2q-1 < n; H^n(P^n) \approx J, \text{ 当 } n \text{ 是奇数}. \ \rbrack$$

6.6 推论 P^n 是否能定向的, 按照 n 是奇数或偶数.

证 明 已经指出过, P^n 是闭假流形. 然后从定理 6.5 给出的 $H_n(P^n)$ 与定理 III. 4.2, 得本推论.]

例 6.6 n 维射影空间 P^n 的模 2 上同调群是

$$H^q(P^n; J_2) = H^q(L^n; J_2) \approx J_2, \quad 0 \leqslant q \leqslant n. \qquad (4)_q$$

这里的 L^n 是前一例中的 P^n 的单纯剖分. 我们将给出的证法不用块形剖分(参看习题6), 而是用单纯剖分 L^n, 用归纳法与同调序列; 它还为例 VI. 4.2 作准备.

证 明 首先,

$$H^q(L^n, L^{n-1}; J_2)\begin{cases} =0, & q\neq n, \\ \approx J, & q=n. \end{cases} \tag{5}$$

事实上，开子复形 L^n-L^{n-1} 与 $SdK_+^n-SdK^{n-1}$ 相同，因而它们的模 2 上同调群相同;然后再用例 V.5.2 (在系数群为 J_2 时)(SdK_+^n, SdK^{n-1}).

其次用归纳法. 当 $n=1$, P^1 即 S^1; $n=1$ 时的式(4)显然成立. 归纳假设是在 n 换作 $n-1$ 时的式(4)成立;求证的是在 $n(>1)$ 时的式(4)成立. 因为 L^n 是 n 维闭假流形,从例 V.2.3 (在系数群为 J_2 时),式$(4)_n$ 成立. 故求证的是式 $(4)_q$, $0\leqslant q\leqslant n-1$. 但这是同构的存在

$$i^*: H^q(L^n; J_2)\approx H^q(L^{n-1}; J_2), \quad 0\leqslant q\leqslant n-1 \tag{6$_q$}$$

与归纳假设的明显推论;所以归结为求证式(6).

考虑(L^n, L^{n-1})的上同调序列的下面一段:

$$H^n(L^{n-1}; J_2) \xleftarrow{i^{n*}} H^n(L^n; J_2) \xleftarrow{j^{n*}} H^n(L^n, L^{n-1}; J_2) \xleftarrow{\delta^{n-1*}} H^{n-1}(L^{n-1}; J_2)$$
$$\xleftarrow{i^{n-1*}} H^{n-1}(L^n; J_2) \xleftarrow{j^{n-1*}} H^{n-1}(L^n, L^{n-1}; J_2) \leftarrow \cdots.$$

从左端数,第一个上同调群是零，因为维数；第二个 $\approx J_2$, 上文已说过；第三与第四个 $\approx J_2$, 分别从式(5)与归纳假设；第六个 $\approx J_2$, 从式(5). 然后从 j^{n*} 是满同态,知 j^{n*} 是同构；由此知 δ^{n-1*} 象是零;从而知 i^{n-1*} 是同构. 这证明了式$(6)_{n-1}$.

再看序列的另一段

$$\cdots\leftarrow H^{q+1}(L^n, L^{n-1}; J_2) \xleftarrow{\delta^{q*}} H^q(L^{n-1}; J_2) \xleftarrow{i^{q*}} H^q(L^n; J_2)$$
$$\xleftarrow{j^{q*}} H^q(L^n, L^{n-1}; J_2)\leftarrow\cdots, \quad q<n-1.$$

由于式(5)，第一与第四个上同调群都是零，i^{q*} 都是同构，$0\leqslant q<n-1$. 这就完全证明了式(6),因而也证明了式(4). ▌

附 记 同样地从下同调序列的考虑,有

$$i_*: H_q(L^{n-1}; J_2)\approx H_q(L^n; J_2), \quad 0\leqslant q\leqslant n-1. \tag{6c$_q$}$$

(复习题.)

习 题

1. 试取 Möbius 带的一个简便的块形剖分,从而计算整下同调群.
2. 试同样地求闭曲面的整下同调群. 参看沙爱福、施雷发著，江泽涵

译,拓扑学,高等教育出版社 1959, 160 页中的 (o), (h), (k) 三式.

3. 试同样地求三个圆周的乘积 T^3 的整下同调群. 参看 III §1 中习题6.

4. 试同样地求三维的透镜空间 $L(p, q)$的整下同调群. 参看《拓扑学》,同上, 239—240 页.

5. 试用例 6.4 中 $B(K^n)$ 的关联矩阵,来计算 K^n 的同调群.

6. 试用块形剖分,来证明: $H_q(P^n; J_2)\approx J_2$, $0\leqslant q\leqslant n$.

7. 闭组合流形及其对偶定理

本节中所讨论的闭组合流形,一方面是特殊的闭假流形,另一方面又是闭拓扑流形(包含闭曲面、各维的球与射影空间)的推广. 闭组合流形的对偶定理是一个经典定理; 它的证明将用到块形剖分与上同调群. 因而本章中各种同调群可以看作是为着证明这定理而发展起来的工具.

闭组合流形与闭假流形的关系 如果一个复形的同调群与 $N(\geqslant 0)$ 维球 S^N 的相同,这复形就叫作一个 N 维**同调球**. N 维同调球是多种多样的, 例如 N 维球 $\dot{\underline{s}}^{N+1}$ 与 $\dot{\underline{s}}^{N+1}\vee\underline{s}^q$ (定义见 III §5 中习题5. q 为任意正整数). 为方便起见, 还把空复形看作是 -1 维同调球.

7.1 定义 如果一个连通的非空的 n 维复形 M 的每一单形 s^p, $0\leqslant p\leqslant n$, 在 M 中的环绕复形 $\mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$,都是一个 $n-p-1$ 维同调球,则 M 叫作 n 维**闭组合流形**.

环绕复形 $\mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$ 是 $n-p-1$ 维同调球的条件是:

$$H_q(\mathrm{Lk}^+\,\underline{s}^p)\begin{cases}\approx J, & \text{当 } q=n-p-1,\\ =0, & \text{当 } q\neq n-p-1.\end{cases}\tag{1a}$$

从 M 是 n 维复形的假设与 §5 中式(7), $\mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$ 是 M 的不高于

$n-p-1$ 维的子复形. 所以式(1a)蕴涵 $\mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$ 是 M 的 $n-p-1$ 维的子复形. 容易看出,零维的闭组合流形只是一个点,一维的是一条简单闭折线.

根据局部同调群的定义, M 是闭组合流形的条件还可以改述如下: 复形 M 在它的任一点 $x(\in|M|)$ 处的局部同调群

$$H_q^M(x)\begin{cases}\approx J, & \text{当 } q=n-p-1,\\ =0, & \text{当 } q\neq n-p-1.\end{cases}$$

然后根据定理 5.8, 闭组合流形是拓扑不变的.

我们现在要提一提另一种闭流形——闭拓扑流形. 如果一个复形 K 的每一点$(\in|K|)$有一个邻域, 同胚于 n 维欧几里得空间, K 就叫作一个 n 维的**闭拓扑流形**. 任意一个 n 维的闭拓扑流形是一个 n 维的闭组合流形,但反之,闭组合流形不必是闭拓扑流形; 这些本书中都不证明.

例 7.1　容易看出,环面的双角锥是闭假流形, 但不是闭组合流形.

7.2 命题　设 M 是 n 维的闭组合流形, $\underline{s}^p$ 是 M 的一个 p 维单形,而且 $L=\mathrm{Lk}_M\,\underline{s}^p$ 是 $\underline{s}^p$ 在 M 中的环绕复形. 则当 $p<n-1$ 时, L 是 $n-p-1$ 维的闭组合流形; 当 $p=n-1$ 时, L 由两个点组成.

证　明　在定义 7.1 后, 就说过 L 是 M 的 $n-p-1$ 维子复形.

先看 $p<n-1$, 即 $n-p-1>0$. 这时候,作为 $n-p-1$ 维同调球, L 是连通的非空的. 设 $\underline{t}^r$ 是 L 的任意一个 r 维单形,因而 $\underline{t}^r\underline{s}^p$ 是 M 的 $r+p+1$ 维单形. 从定义(参看 §5 中式(7)), $\underline{t}^r$ 在 L 中的环绕复形是

$$\mathrm{Lk}_L\,\underline{t}^r=\{\underline{t}\,|\,\underline{t}^r\underline{t}\in L\};$$

但

$$\{\underline{t}\,|\,\underline{t}^r\underline{t}\in L\}=\{\underline{t}\,|\,\underline{t}^r\underline{s}^p\underline{t}\in M\}=\mathrm{Lk}_M(\underline{t}^r\underline{s}^p);$$

即 $\underline{t}^r$ 在 L 中的环绕复形是 $\underline{t}^r\underline{s}^p$ 在 M 中的环绕复形. 所以 $\mathrm{Lk}_L\,\underline{t}^r$

是$n-(r+p+1)-1=(n-p-1)-r-1$维同调球. 这说明L是$n-p-1$维闭组合流形.

当$p=n-1$时, $\mathrm{Lk}_M \underline{s}^{n-1}$是零维的, 而且是零维同调球, 所以它由两个点组成. ▌

7.3 定理 $n(\geqslant 1)$维闭组合流形是闭假流形.

证 明 设M是$n(\geqslant 1)$维的闭组合流形,而且$\underline{s}^p$是M的任一p维单形. 当$p<n-1$, 因为$\mathrm{Lk}\,\underline{s}^p$是$M$的$n-p-1$维的非空的子复形, 根据命题5.6, $\underline{s}^p$是M的一个n维单形的面, 即M具有闭假流形的纯粹性. 当$p=n-1$, 根据命题7.2, $\mathrm{Lk}\,\underline{s}^{n-1}$恰是两个点; 所以$\underline{s}^{n-1}$恰是两个$n$维单形的公共面, 即$M$具有闭假流形的无分支性.

要想证明M具有闭假流形的强连通性,我们对闭组合流形的维数作归纳法. 一维的闭组合流形是一条简单折线, 所以也是闭假流形. 设$n-1$维的闭组合流形,都是闭假流形. 现在来证n维的闭组合流形M具有强连通性, 因而也是闭假流形. 设$\underline{s}_1^n$与$\underline{s}^n$是M的任意两个n维单形, 它们分别有顶点a^1与a. 因为M连通, M上有一条折线$a^1a^2a^3\cdots a^ka$. 因为M的纯粹性, M上又有n维单形$\underline{t}_i^n$, 以一维单形(a^i, a^{i+1})为棱, $i=1, 2, \cdots, k$, $a^{k+1}=a$. 把$\underline{s}_1^n$与$\underline{s}^n$分别记作$\underline{t}_0^n$与$\underline{t}_{k+1}^n$. 根据命题7.2($p=0$)与归纳假设, 每一个环绕复形$\mathrm{Lk}\,a^i$是闭假流形, 因而强连通. 这蕴涵闭星形$\mathrm{St}\,a^i=a^i\circ\mathrm{Lk}\,a^i$强连通,它的$\underline{t}_i^n$与$\underline{t}_{i+1}^n$可以用它里面的一条$n$维折线连接起来. 于是$\underline{s}_1^n$与$\underline{s}^n$可以用$M$上的一条$n$维折线连接起来. ▌

因此,闭组合流形也有**能定向的**与**不能定向的**两类.

***SdM* 上的两个块形剖分** 对于任意一个复形$K=\{\underline{s}_i^p\}$, 例6.2中给出了它的重心重分SdK的块形剖分$B=\{Sd\underline{s}_i^p\}$. 现在

我们再写下它的块形与有向块形的公式. 从定理 IV. 3.4, 有

$$Sd\underline{s}_i^p = \{(\dot{t}_0,\ \dot{t}_1,\ \cdots,\ \dot{t}_q) \mid \underline{t}_q \prec \underline{s}_i^p\}, \qquad (1)$$

对于 K 的、所有的单形真序列 $\underline{t}_0 \prec \underline{t}_1 \prec \cdots \prec t_q$.

再者, 从 IV §3 中习题 3, 有

$$Sd_p s_i^p = \sum [s_i^p : t^{p-1}] \cdots [t^1 : t^0]\, \dot{s}_i^p \dot{t}^{p-1} \cdots \dot{t}^0, \qquad (2)$$

这里的和号是对于 M 的所有的真序列(其中 $\underline{s}_i^p$ 固定)

$$\underline{t}^0 \prec \underline{t}^1 \prec \cdots \prec \underline{t}^{p-1} \prec \underline{s}_i^p$$

展开的. 式(2)中每一项是一个有向单形, 以 $\dot{s}_i^p$ 为它的主导顶点; 而且它的定向, 在 $\underline{s}_i^p$ 与 $\underline{t}^0 = a$ (顶点)的定向取定为 s_i^p 与 $+a$ 之后, 不依赖于 $\underline{t}^1,\ \underline{t}^2,\ \cdots,\ \underline{t}^{p-1}$ 的定向. 把这里对于一般复形 K 的讨论应用到 n 维的闭组合流形 M, 就得到 SdM 上的块形剖分 $B = \{Sd\underline{s}_i^p\}$; 这是我们所说的、$SdM$ 的两个块形剖分的第一个.

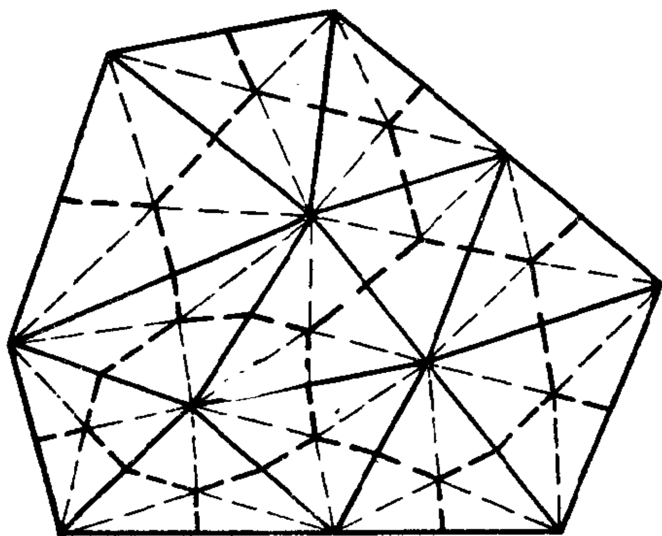
如同用式(1)来定义 SdM 的块形剖分 B, 我们现在考虑

$$\underline{\sigma}(\underline{s}_i^p) = \{(\dot{t}_0,\ \dot{t}_1,\ \cdots,\ \dot{t}_q) \mid \underline{s}_i^p \prec \underline{t}_0\}, \qquad (3)$$

对于 M 的、所有的单形真序列

$$\underline{t}_0 \prec \underline{t}_1 \prec \cdots \prec \underline{t}_q.$$

$\underline{\sigma}(\underline{s}_i^p)$ 显明地是 SdM 的一个 $n-p$ 维的子复形(图 9).



粗虚线: $\tilde{B}$ 中的块形

图 9

7.4 命题 设 M 是 n 维的闭组合流形. $\overset{*}{B}=\{\underline{\sigma}(\underline{s}_i^p)\}$ 是 SdM 的一个块形剖分,叫作块形剖分 B **的对偶的块形剖分**.

证 明 因为 SdM 的每一个单形都在 $\overset{*}{B}$ 中出现,所以 $\overset{*}{B}$ 中子复形的并集即 SdM. 现在来证 $\overset{*}{B}$ 满足块形剖分的三个条件.

1) 当 $i\neq j$, $\underline{\sigma}(\underline{s}_i^p)$ 与 $\underline{\sigma}(\underline{s}_j^p)$ 明显地无公共的 $n-p$ 维单形.

2) 容易看出,如果 M 的两个单形 $\underline{s}_1$ 与 $\underline{s}_2$ 的全体顶点是 M 的一个单形 $\underline{u}$ 的顶点,即 $\underline{s}_1\underline{s}_2=\underline{u}$, 则 $\underline{\sigma}(\underline{s}_1)\cap\underline{\sigma}(\underline{s}_2)=\underline{\sigma}(\underline{u})$; 如果不是 M 的一个单形的顶点,则 $\underline{\sigma}(\underline{s}_1)\cap\underline{\sigma}(\underline{s}_2)=\emptyset$. (复习题.)

3) 首先我们给出 $\dot{\underline{\sigma}}(\underline{s}_i^p)$. 从定义,它是 $\underline{\sigma}(\underline{s}_i^p)\cap\underline{\sigma}(\underline{s}_j^r)$ 的并集,对于所有的 $\underline{s}_j^r$, $r>p$. 根据 2),

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\sigma}}(\underline{s}_i^p)&=\{\underline{\sigma}(\underline{s}_j^r)\mid \underline{s}_i^p\prec\underline{s}_j^r,\ r>p\}\\&=\{(\overset{*}{\underline{t}}_0,\ \overset{*}{\underline{t}}_1,\ \cdots,\ \overset{*}{\underline{t}}_q)\mid \underline{t}_0\text{ 以 }\underline{s}_i^p\text{ 为真面}\},\end{aligned}\qquad(4)$$

这里 $\underline{s}_i^p\prec\underline{t}_0\prec\underline{t}_1\prec\cdots\prec\underline{t}_q$ 是真序列. 所以

$$\underline{\sigma}(\underline{s}_i^p)=\overset{*}{\underline{s}}{}_i^p\circ\dot{\underline{\sigma}}(\underline{s}_i^p).$$

其次,复形 $\dot{\underline{\sigma}}(\underline{s}_i^p)$ 与环绕复形的重心重分 $Sd\,\mathrm{Lk}\,\underline{s}_i^p$ 同构(定理 III.1.11 前). 事实上,把式(4)中以 $\underline{s}_i^p$ 为真面的 $\underline{t}_j$ 写成 $\underline{u}_j\underline{s}_i^p$ 时,即 $\underline{t}^j=\underline{u}_j\underline{s}_i^p$ 时,则 $\mathrm{Lk}\,\underline{s}_i^p=\{\underline{u}_j\}$.

$$(\overset{*}{\underline{t}}_0,\ \overset{*}{\underline{t}}_1,\ \cdots,\ \overset{*}{\underline{t}}_q)\leftrightarrow(\overset{*}{\underline{u}}_0,\ \overset{*}{\underline{u}}_1,\ \cdots,\ \overset{*}{\underline{u}}_q),$$

这个对应就建立所说的同构. 最后,根据这里的结果,例 5.2, 同调群的重分不变性以及闭组合流形的条件 3), $\overset{*}{B}$ 满足块形剖分的条件 3). ▌

对偶定理 在 §6 中,我们一般地引进了有向块形. 现在,对于 n 维的闭组合流形 M 的重心重分 SdM 的块形剖分 $\overset{*}{B}$, 我们采用特殊的、但显豁的方式.

设 M 能定向,并已取定了一个定向. 设 M 的定向单形的一个基本组是 $\{s_i^p\}$, 其中的 n 维的 s_i^n 都与 M 的定向协合. 如同

SdM 的块形剖分 B 的式(2)，现在我们考虑 $C_{n-p}(SdM)$ 中的链

$$\sigma(s_i^p)=\sum[t^n:t^{n-1}]\cdots[t^{p+1}:t_i^p]\overset{*}{t}{}^n\overset{*}{t}{}^{n-1}\cdots\overset{*}{t}{}^{p+1}\overset{*}{s}{}_i^p, \tag{5}$$

这里的和号是对于 M 的所有真序列(其中 $\underline{s}_i^p$ 固定)

$$\underline{s}_i^p\prec\underline{t}^{p+1}\prec\cdots\prec\underline{t}^{n-1}\prec\underline{t}^n$$

展开的．式(5)中的每一项是一个有向单形，它的定向不依赖于 t^{p+1}, $\cdots$, t^{n-1} 的定向，由 s_i^p 的与 M 的定向完全确定了．

明显地，链 $\sigma(s_i^p)\subset\underline{\sigma}(s_i^p)$；下面的命题 7.5 将给出 $\partial\sigma(s_i^p)\subset\dot{\underline{\sigma}}(s_i^p)$．由此可见，$\sigma(s_i^p)$ 是 $Z_{n-p}(\underline{\sigma}(s_i^p),\ \dot{\underline{\sigma}}(\underline{s}_i^p))$ 的一个生成元，即一个有向块形．

7.5 引理　设 M 是 n 维的能定向的，并且已定向的闭组合流形，而且它的 n 维单形的定向都与它的定向协合．则

$$\partial\sigma(s_i^p)=(-1)^{n-p}\sum[t^{p+1}:s_i^p]\sigma(t^{p+1}), \tag{6}$$

这里的和号是对于以 s_i^p 为面的 t^{p+1} 展开的．

式(6)蕴涵 $\sigma(s_i^p)$ 是与 $\sigma(\underline{s}_i^p)$ 相应的有向块形．式(6)还可以写成

$$\partial\sigma(s_i^p)=(-1)^{n-p}\sigma(\delta s_i^p). \tag{7}$$

证　明　从式(5)，我们计算 $\partial\sigma(s_i^p)$ 中下列三种 $n-p-1$ 维单形的系数．

1）单形 $\overset{*}{t}{}^n\cdots\hat{\overset{*}{t}}{}^k\cdots\overset{*}{s}{}_i^p$, $p<k<n$．它的系数是

$$(-1)^{n-k}[t^n:t^{n-1}]\cdots(\sum[t^{k+1}:t^k][t^k:t^{k-1}])\cdots[t^{p+1}:s_i^p].$$

因为圆括号中的和号是对于 t^k 展开的，这个和是零(命题 III. 2.2)；于是这系数是零．

2）单形 $\overset{*}{t}{}^{n-1}\cdots\overset{*}{s}{}_i^p$．它的系数是

$$(\sum[t^n:t^{n-1}])\cdots[t^{p+1}:s_i^p].$$

圆括号中的和号是对于以 t^{n-1} 为公共面的两个 t^n 展开的．由于它们的协合定向，圆括号中的和是零；于是这系数也是零．(注意，如果 M 不能定向，则圆括号中的和可以是零或 ±2.)

3) 单形 $\mathring{t}^n\cdots\mathring{t}^{p+1}$. 它的系数是

$$(-1)^{n-p}([t^n:t^{n-1}]\cdots[t^{p+2}:t^{p+1}])[t^{p+1}:s_i^p],$$

等于这单形在 $\sigma(t^{p+1})$ 中的系数,乘上 $(-1)^{n-p}[t^{p+1}:s_i^p]$.

根据以上的计算,只有第三种单形在 $\partial\sigma(s_i^p)$ 中出现,而且它的系数恰是式(6)所要求的. ▌

沿用引理 7.5 的假设. 把 M 的有向单形 s_i^q 看作 M 上的上链,$\sigma(s_i^p)$ 看作 SdM 的块形剖分 $\overset{*}{B}$ 上的块形下链. 则一一的、满对应

$$\sigma:s_i^q\to\sigma(s_i^q),$$

作线性扩张后,给出一个同构.

$$\sigma:C^q(M)\approx C_{n-q}(\overset{*}{B}).$$

根据式(7),还有

$$\sigma:Z^q(M)\approx Z_{n-q}(\overset{*}{B}),$$
$$\sigma:B^q(M)\approx B_{n-q}(\overset{*}{B});$$

因而 σ 诱导出同构

$$\sigma_*:H^q(M)\approx H_{n-q}(\overset{*}{B}). \tag{8}$$

这就给出下面的定理.

7.6 定理 如果 M 是能定向的 n 维的闭组合流形,则

$$\Delta=\pi_*i_*\sigma_*:H^q(M)\approx H_{n-q}(M),$$

这里的 σ_* 是式(8)中的同构,$i_*:H_q(\overset{*}{B})\to H_q(SdM)$ 是定理 6.4 中的块形同构,$\pi_*:H_q(SdM)\to H_q(M)$是定理 IV.4.3 中的标准同构. Δ 叫作**对偶同构**. ▌

本定理与定理 2.4 立即给出下面的 Poincaré 对偶定理.

7.7 定理(对偶定理) 对于能定向的 n 维的闭组合流形 M,

$$R_q(M)=R_{n-q}(M),\quad T_{q-1}(M)\approx T_{n-q}(M),$$

即 M 的 q 维与 $n-q$ 维 Betti 数相等,$q-1$ 维与 $n-q$ 维挠系数相同. ▌

能定向的 M 的定理 7.6 给出

$$H_n(M)\approx H^0(M)\approx J;$$

由此可见，定理 7.6 不适用于不能定向的闭组合流形. 但是，如果改用 J_2 作系数群，则不难看出应如何修改本节的全部讨论，使得它对于能定向的与不能定向的闭组合流形都成立. 然后相当于定理 7.6 与 7.7，分别有下面二定理.

7.8 定理　对于 n 维的闭组合流形 M，

$$\Delta: H^q(M; J_2)\approx H_{n-q}(M; J_2). \quad]$$

7.9 定理(对偶定理)　对于 n 维的闭组合流形 M，

$$R_q^{(2)}(M)=R_{n-q}^{(2)}(M). \quad]$$

7.10 推论　奇维的闭组合流形的 Euler-Poincaré 示性数等于零.]

习　题

试详细证明定理 7.8.

第六章　上同调环·流形的交环

设 $\mathfrak{R}$ 是一个交换群，而且可以引进一个乘法，使得 $\mathfrak{R}$ 成为一个环(§1)．整数环 J 是最重要的例子．把复形 K 的、以交换群 $\mathfrak{R}$ 为系数群的各维上同调群的直和记作

$$H^*(K;\mathfrak{R})=\sum_q H^q(K;\mathfrak{R}).$$

在本章中，我们将在 $H^*(K;\mathfrak{R})$ 中引进一个乘法运算叫作上积(§2)，使得 $H^*(K;\mathfrak{R})$ 成为一个环；这个环是复形 K 的一个新拓扑不变量，叫作 K 的上同调环．

本章中还将说明，闭组合流形 M 有一个比较直观的交环或下同调环 $H_*(M;\mathfrak{R})$(§4)，与 $H^*(M;\mathfrak{R})$ 环同构．交的概念(§4)可以看作是上积与卡积(§3)的来源．但一般的复形 K 的交环不存在；这就使得上同调群，比起下同调群来，占有更重要的地位．

为记号简便起见，本章的讨论将只限于环 J，但实际上，不需要任何改变，就完全适用于具有单位元素的一般环 $\mathfrak{R}$(对于定理2.8，$\mathfrak{R}$ 必须是交换的)．

1．环

本节中我们只引进环以及几个有关的代数概念，作为下一节的准备．

设 $\mathfrak{R}$ 是一个交换群，它的元素是 x, y, z, u 等，它的运算叫作加，记作 $+$．如果对于 $\mathfrak{R}$ 中任意两个元素 x 与 y，$\mathfrak{R}$ 中有一个对

应的元素 u, 叫作 x 与 y 的积,记作 $u=x\times y$, 使得

1) 乘法结合律成立: $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$,

2) 分配律成立:

$$(x+y)\times z=x\times z+y\times z,\quad z\times(x+y)=z\times x+z\times y,$$

$\mathfrak{R}$ 就叫作一个**环**. 如果,对于环 $\mathfrak{R}$ 中所有的 x, y, $x\times y=y\times x$, 则环 $\mathfrak{R}$ 叫作**交换环**.

因为一个环 $\mathfrak{R}$, 对于运算 + 而言,是一个交换群,所以它有零元素. 如果一个环 $\mathfrak{R}$ 有一个元素 e, 使得,对于 $\mathfrak{R}$ 的每一个元素 x,

$$e\times x=x\times e=x,$$

e 就叫作 $\mathfrak{R}$ 的一个**单位元素**. 如果环 $\mathfrak{R}$ 有一个单位元素 e, 则只能以 e 为唯一的一个单位元素. 事实上,如果 e' 也是 $\mathfrak{R}$ 的一个单位元素,则

$$e=ee'=e'.$$

如果环 $\mathfrak{R}$ 含有不只一个元素,而且它的所有的非零元素,对于运算 × 而言,组成一个交换群,则 $\mathfrak{R}$ 叫作一个**域**. 域所以必具有单位元素.

例 1.1 在通常的加法与乘法的意义下,全体有理数 R, 全体整数 J, 全体整数模素数 p 即 J_p, 都是域,所以也都是环.

全体偶整数 $2J$ 是一个环,但非域. 环 $2J$ 无单位元素.

例 1.2 环 $J_2[x|x^{n+1}=0]$, $n>0$. 用 x 表示一个未知数,考虑所有的 n 阶的多项式:

$$a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n,\quad a_i\in J_2.$$

命 $ax=xa$, $a\in J_2$, 而且命 $x^{n+1}=0$; 用通常的多项式加法与乘法. 不难验证,如此得到的是一个交换环,记作 $J_2[x|x^{n+1}=0]$. 如果 1 是 J_2 的单位元素,则 $1x^0$ 是所得到的环的单位元素.

设 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 是两个环,而且 $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}'$ 是一个单值对应. 如果,对于 $\mathfrak{R}$ 的任两元素 x 与 y,

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad f(x\times y)=f(x)\times f(y),$$

则 f 叫作一个**环同态**. 如果环同态 f 是一一的而且是满的，则 f 叫作一个**环同构**.

2. 上积·上同调环

复形 K 的上同调环中的乘积运算,上积,将由 K 上的上链的上积诱导出来. 为着定义上链的上积,我们将先选取 K 的顶点的一个局部顺序或整体顺序;然后通过 K 的重心重分的一个自然的局部顺序，证明诱导出来的上同调环中上积运算不依赖于所选取的顺序.

有序复形·有序单形 设 $\underline{s}=(a^0, a^1, \cdots, a^q)$ 是一个无向单形,而且取定了它的顶点的一个顺序,例如

$$a^0<a^1<\cdots<a^q.$$

在明显的意义下,$\underline{s}$ 的顶点的这个顺序诱导出 $\underline{s}$ 的任意一个面 $\underline{t}$ 的顶点的一个顺序. 设 K 是一个复形，而且对于 K 的每一个单形 $\underline{s}$ 都取定了它的顶点的一个顺序. 这时候,$\underline{s}$ 的任意一个面 $\underline{t}$ 的顶点有两个顺序，一个是取定了的，一个是 $\underline{s}$ 的顺序所诱导出来的. 如果对于 K 的任意一个单形与它的任意一个面,这面的顶点的这两个顺序都是相同的,我们就说 K 具有一个**局部顺序**. 具有局部顺序 ω 的复形 K 记作 K^ω, 简称为**有序复形**.

我们总能够使一个复形 K 成为一个有序复形. 例如,取定 K 的全体顶点的一个顺序 ω, 叫作 K 的一个**整体顺序**; 它所诱导出的、K 的每一个单形的顶点的顺序，就给出 K 的一个局部顺序，仍记作 ω. 这就使 K 成为一个有序复形 K^ω.

复形 K 的重心重分 SdK 有一个特别重要的局部顺序，叫作

SdK 的**自然顺序**：对于 SdK 的、由真序列 $\underline{s}_0 \prec \underline{s}_1 \prec \cdots \prec \underline{s}_q$ 给出的单形 $(\mathring{s}_0, \mathring{s}_1, \cdots, \mathring{s}_q)$，取定顺序

$$\mathring{s}_q < \cdots < \mathring{s}_1 < \mathring{s}_0;$$

即主导顶点 $\mathring{s}_q$ 在其他顶点之前．换句话说，如果 K 的单形 $\underline{t} \prec \underline{s}$，则取 $\mathring{s} < \mathring{t}$．具有自然顺序的 SdK 记作 $Sd^{\varphi}K$．

例 2.1　设 K 是 $\underline{s}^2 = (a^0, a^1, a^2)$ 的边缘复形 $\dot{\underline{s}}^2$．取定顺序 $a^0 < a^1$，$a^1 < a^2$，$a^2 < a^0$．这给出 K 的一个局部顺序．这个顺序是不能由 K 的整体顺序诱导出来的．

设 K^ω 是一个有序复形．设 $\underline{s}^q = (a^{j_0}, a^{j_1}, \cdots, a^{j_q})$ 是 K 上的任一单形，而且按照顺序 ω，

$$a^{j_0} < a^{j_1} < \cdots < a^{j_q}.$$

我们按照顺序 ω 写下的记号

$$a^{j_0} a^{j_1} \cdots a^{j_q}$$

叫作 K^ω 的一个 q 维**有序单形**．同时也把它看作是 K 的一个有向单形，因而是 K 的、与 $\underline{s}^q$ 相应的两个有向单形之一．K^ω 的全体这种有序单形恰给出 K 的有向单形的一个基本组．因而 K 上的任一 q 维整上链，在用上链的线性组合的表示时，是 K^ω 的 q 维有序单形的以整数为系数的一个线性组合，而且全体系数都唯一地确定了；例如 $a^{j_1} a^{j_0} a^{j_2} \cdots a^{j_q}$ 不是 K^ω 的有序单形，但作为有向单形或整上链，它是而且只能是 $-a^{j_0} a^{j_1} \cdots a^{j_q}$ 这有序单形、或这有序单形的线性组合．

有序复形上的上积·上同调环　为着定义复形 K 上的上链的上积，我们先取定 K 的顶点的一个局部顺序 ω，得到有序复形 K^ω．设 $x^p \in C^p(K)$，$y^q \in C^q(K)$；x^p 与 y^q 的上积，记作 $x^p \cup y^q$，是 K 的一个 $p+q$ 维上链：

$$x^p \cup y^q \in C^{p+q}(K),$$

它在 K^ω 的有序单形 $a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_{p+q}}$ (作为下链)上的值是

$$\begin{aligned}&\langle x^p \cup y^q,\ a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_{p+q}}\rangle\\ &\quad=\langle x^p,\ a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_p}\rangle\langle y^q,\ a^{i_p}a^{i_{p+1}}\cdots a^{i_{p+q}}\rangle.\end{aligned} \tag{1}$$

我们注意,顶点 a^{i_p} 在式(1)右端的两个因子的每一个中都出现,而且右端是两个整数的积. 这个定义依赖于顺序 ω, 因为 ω 才使得式(1)左端的有序单形唯一地分解成右端的两个有序单形. 式(1)还说明上积是双线性函数. ■

如果把 K 上的上链看成 K^ω 的有序单形的线性组合,则从式(1)得到下面简单的说法. 对于 K^ω 的有序单形 $a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_p}$ 与 $a^{j_0}a^{j_1}\cdots a^{j_q}$ (看作 K 上的上链),

$$a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_p}\cup a^{j_0}a^{j_1}\cdots a^{j_q}=\begin{cases}a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_p}a^{j_1}\cdots a^{j_q}, & \text{当 } a^{i_p}=a^{j_0}, \text{ 而且这 } p+q+1 \text{ 个顶点是 } K \text{ 的一个单形的顶点},\\ 0, & \text{在其他情形};\end{cases} \tag{2}$$

然后作双线性扩张. 式(2)可以看作是说:能拼合的,拼合;不能拼合的,抹掉. 所以用上链的线性组合的表示时,可以很方便地根据式(2)以及双线性函数性质来计算上积.

例 2.2 设 K 是二维单形 $s^2=(a^0, a^1, a^2)$ 的闭包复形, ω 是由整体顺序 $a^0<a^1<a^2$ 给定的. 对于一维上链

$$x^1=a^0a^1+a^0a^2,\quad y^1=-a^2a^1+a^1a^2,$$

根据式(2)所给出的计算法,

$$x^1\cup y^1=a^0a^1a^2.$$

如果改用整体顺序 $\omega': a^1<a^2<a^0$, 则这两个上链应写成

$$x'=-a^1a^0-a^2a^1,\quad y'=a^1a^0+a^1a^2.$$

把根据顺序 ω' 来作的上积运算记作 $\cup'$, 则

$$x'\cup' y'=0.$$

由此可见,上链的上积依赖于顺序.

还容易算出:

$$y^1\cup x'=0,\quad y'\cup' x^1=-a^1a^2a^0.$$

上文已经说过，上积是双线性函数．这就是说，上积运算满足分配律．容易证明，它还满足结合律：

$$(x^p \cup y^q) \cup z^r = x^p \cup (y^q \cup z^r),$$

因而可以把这等式的两端都写成 $x^p \cup y^q \cup z^r$．还明显地有

$$e^0 \cup x^p = x^p \cup e^0 = x^p,$$

这里 $e^0 = \sum a^i$，和号对于 K 的所有顶点 a^i 展开(参看例 V.2.2)．这些性质说明，根据顺序 ω 定义的、K 的上链的上积运算，使 K 的各维链群的直和成为一个环，以 e^0 为单位元素．

2.1 命题(上积的上边缘公式)

$$\delta(x^p \cup y^q) = \delta x^p \cup y^q + (-1)^p x^p \cup \delta y^q.$$

这个公式与数学分析中的微分公式类似．

证　明　设 $a^0 a^1 \cdots a^{p+q+1}$ 是 K_ω 的任一 $p+q+1$ 维有序单形．然后只需要明显的直接计算：

$$\begin{aligned}
&\langle \delta(x^p \cup y^q),\ a^0 a^1 \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&= \langle x^p \cup y^q,\ \partial a^0 a^1 \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{p+q+1} (-1)^j \langle x^p \cup y^q,\ a^0 \cdots \hat{a}^j \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \langle x^p,\ a^0 \cdots \hat{a}^j \cdots a^{p+1} \rangle \langle y^q,\ a^{p+1} \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&\quad + \sum_{j=p}^{p+q+1} (-1)^j \langle x^p,\ a^0 \cdots a^p \rangle \langle y^q,\ a^p \cdots \hat{a}^j \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&= \langle x^p,\ \partial a^0 \cdots a^{p+1} \rangle \langle y^q,\ a^{p+1} \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&\quad + (-1)^p \langle x^p,\ a^0 \cdots a^p \rangle \langle y^q,\ \partial a^p \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&= \langle \delta x^p,\ a^0 \cdots a^{p+1} \rangle \langle y^q,\ a^{p+1} \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&\quad + (-1)^p \langle x^p,\ a^0 \cdots a^p \rangle \langle \delta y^q,\ a^p \cdots a^{p+q+1} \rangle \\
&= \langle \delta x^p \cup y^q + (-1)^p x^p \cup \delta y^q,\ a^0 \cdots a^{p+q+1} \rangle. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

本命题有下面的重要推论．

2.2 引理　上闭链 ∪ 上闭链 = 上闭链，

上边缘 $\cup$ 上闭链 = 上边缘,

上闭链 $\cup$ 上边缘 = 上边缘.

证 明 第一个结论的证明是明显的. 第二个结论的证明: 如果 $\delta x^{p-1}=x^p$, $\delta y^q=0$, 则 $x^p\cup y^q=\delta(x^{p-1}\cup y^q)$. ▌

2.3 定理 两个上闭链的上积的上同调类由两个因子的上同调类完全决定.

证 明 设 $z_1'=z_1^p+\delta c_1^{p-1}$, $z_2'=z_2^q+\delta c_2^{q-1}$ 都是上闭链. 然后

$$z_1'\cup z_2'=z_1^p\cup z_2^q+\delta c_1^{p-1}\cup z_2^q+z_1^p\cup\delta c_2^{q-1}+\delta c_1^{p-1}\cup\delta c_2^{q-1}.$$

根据引理 2.2, 后三个上积都是上边缘. ▌

根据本定理, 我们才能定义 K 的两个上同调类 $\bar{z}^p$ 与 $\bar{z}^q$ 的上积为

$$\bar{z}^p\cup\bar{z}^q=(z^p\cup z^q)^*, \tag{3}$$

这里上闭链 $z^p\in\bar{z}^p$, $z^q\in\bar{z}^q$. 如同上链的上积运算一样, 上同调类的上积运算也满足分配律、结合律, 而且有一个单位同调类 $\bar{e}^0$. 这就说明了, 在 K 的上同调类之间根据顺序 ω 引进上积运算(3)后, K 的各维上同调群的直和就成为一个环, 以 $\bar{e}^0$ 为单位元素. 这个环叫作 K 的**上同调环**. 为着表明它是根据 K 的顺序 ω 得到的, 把它记作 $H^*(K^\omega)$.

保序的单纯映射 设 K^ω, L^ρ 是两个有序复形, 而且 $\underline{f}:K\to L$ 是一个单纯映射. 如果 $\underline{f}$ 有下面的性质: 对于 K 的每一个一维单形的两个顶点 a 与 a', 在顺序 ρ 中 $\underline{f}(a)<\underline{f}(a')$ 蕴涵在顺序 ω 中 $a<a'$. 则 $\underline{f}$ 叫作**保序的单纯映射**, 记作 $\underline{f}:K^\omega\to L^\rho$.

例 2.3 给定了任意一个单纯映射 $\underline{f}$, 总能先取 L 的顶点的任意一个整体顺序 ρ, 再取 K 的顶点的一个整体顺序 ω, 来得到保序的 $\underline{f}:K^\omega\to L^\rho$. 事实上, 设 L 的顶点顺序 ρ 是 $b^1<b^2<\cdots b^l$. 然后只要把 K 的顶点 $\underline{f}^{-1}(b^1)$ 任意地排在最前面, 再把 $\underline{f}^{-1}(b^2)$ 任意地接着排, 等等. 这样得到的, 就是所求

的、K 的顶点的一个整体顺序 ω.

例 2.4　设 K^ω 是有序复形，而且 $Sd^\varphi K$ 是具有自然顺序的、K 的重心重分. 设 s 是 K 的任一单形.

$\underline{\pi}(\hat{s})\to s$ 的在顺序 ω 中的第一个顶点决定一个标准映射 $\underline{\pi}$（参看 IV §3 中式(11)与式(9)）. 不难看出，这个 $\underline{\pi}: Sd^\varphi K\to K^\omega$ 是保序的，而且在所有的标准映射之中，只有这个 $\underline{\pi}$ 是保序的.

2.4 命题　设 $\underline{f}: K\to L$ 是单纯映射，诱导出从上链群的直和 $C^{\cdot}(L)=\sum C^q(L)$ 到 $C^{\cdot}(K)=\sum C^q(K)$ 的同态 $f^{\cdot}: C^{\cdot}(L)\to C^{\cdot}(K)$（参看命题 V.2.5）. 如果取定顺序 ω 与 ρ，使得 $\underline{f}: K^\omega\to L^\rho$ 保序，则 $f^{\cdot}$ 保持上积，即对于 $x^p\in C^p(L)$，$y^q\in C^q(L)$，有

$$f^{\cdot}(x^p\cup y^q)=f^{\cdot}x^p\cup f^{\cdot}y^q, \tag{4}$$

这里的两个上积运算是分别根据顺序 ω 与 ρ 得到的.

证　明　设 $a^0a^1\cdots a^{p+q}$ 是 K^ω 的任一 $p+q$ 维有序单形. 则

$$\langle f^{\cdot}(x^p\cup y^q),\ a^0a^1\cdots a^{p+q}\rangle=\langle x^p\cup y^q,\ fa^0a^1\cdots a^{p+q}\rangle, \tag{5}$$

$$\langle f^{\cdot}x^p\cup f^{\cdot}y^q,\ a^0a^1\cdots a^{p+q}\rangle=\langle x^p,\ fa^0a^1\cdots a^p\rangle\langle y^q,\ fa^pa^{p+1}\cdots a^{p+q}\rangle. \tag{6}$$

如果 $\underline{f}(a^0)$, $\underline{f}(a^1)$, $\cdots$, $\underline{f}(a^{p+q})$ 是两两不同的顶点，由于 $\underline{f}: K\to L$ 是单纯映射，它们是 L 的一个单形的顶点；又由于 $\underline{f}: K^\omega\to L^\rho$ 是保序的以及 $a^0a^1\cdots a^{p+q}$ 是 K^ω 的有序单形，$\underline{f}(a^0)\underline{f}(a^1)\cdots\underline{f}(a^{p+q})$ 是 L^ρ 的有序单形. 然后式(5)与式(6)的右端分别是

$$\langle x^p\cup y^q,\ \underline{f}(a^0)\underline{f}(a^1)\cdots\underline{f}(a^{p+q})\rangle,$$

$$\langle x^p,\ \underline{f}(a^0)\underline{f}(a^1)\cdots\underline{f}(a^p)\rangle\langle y^q,\ \underline{f}(a^p)\underline{f}(a^{p+1})\cdots\underline{f}(a^{p+q})\rangle;$$

根据上积的定义，它们相等. 于是，这情形时的式(4)成立.

如果 $\underline{f}(a^0)$, $\underline{f}(a^1)$, $\cdots$, $\underline{f}(a^{p+q})$ 中有相同的，设 $\underline{f}(a^j)=$ 某一个 $\underline{f}(a^k)$，$k\geqslant j+1$. 根据 $\underline{f}: K^\omega\to L^\rho$ 是保序的，容易证明，即使 $k>j+1$，仍有 $\underline{f}(a^j)=\underline{f}(a^{j+1})$.（复习题.）然后式(5)与式(6)的右端都是零. 于是，这情形时的式(4)也成立. ▌

2.5 引理 设 $\underline{f}: K \to L$ 是单纯映射，诱导出上同调群的直和间的同态 $f^*: H^*(L) \to H^*(K)$. 如果取定顺序 ω 与 ρ，使得 $\underline{f}: K^\omega \to L^\rho$ 保序，则 f^* 保持上积，即对于 $\mathfrak{z}^p \in H^p(L)$, $\mathfrak{z}^q \in H^q(L)$，有

$$f^*(\mathfrak{z}^p \cup \mathfrak{z}^q) = f^*\mathfrak{z}^p \cup f^*\mathfrak{z}^q, \tag{7}$$

这里的两个上积运算是分别根据 ρ 与 ω 得到的. 因而 $f^*: H^*(L^\rho) \to H^*(K^\omega)$ 是环同态.

证　明 我们只须证明式(7). 根据上同调类的上积定义式(13), V § 2 的式(15), 以及命题 2.4 的式(4), 有

$$\begin{aligned} f^*(\mathfrak{z}^p \cup \mathfrak{z}^q) &= f^*((z^p \cup z^q)^*) = (f^{\cdot}(z^p \cup z^q))^* \\ &= (f^{\cdot}z^p \cup f^{\cdot}z^q)^* = (f^{\cdot}z^p)^* \cup (f^{\cdot}z^q)^* \\ &= f^*\mathfrak{z}^p \cup f^*\mathfrak{z}^q. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

复形的上同调环 前此讨论的复形 K 的上同调环 $H^*(K^\omega)$，是根据 K 的一个局部顺序 ω 得到的. 现在要利用 $Sd^\varphi K$ 与例 2.4 来证明上同调环 $H^*(K^\omega)$ 实际上不依赖于所取的顺序 ω.

2.6 定理 设 ω, ω' 是复形 K 的两个局部顺序. 把根据它们得到的上积运算分别记作 $\cup$, $\cup'$. 则对于 K 的任意两个上同调类 $\mathfrak{z}^p$ 与 $\mathfrak{z}^q$,

$$\mathfrak{z}^p \cup \mathfrak{z}^q = \mathfrak{z}^p \cup' \mathfrak{z}^q. \tag{8}$$

换句话说，$H^*(K^\omega) = H^*(K^{\omega'})$，即 K 的上同调环不依赖于所取的顺序，由 K 完全决定了；因而可以写作 $H^*(K)$.

证　明 根据例 2.4，顺序 ω 或 ω' 各决定唯一的一个保序的标准映射 $\underline{\pi}: Sd^\varphi K \to K^\omega$ 或 $\underline{\pi}': Sd^\varphi K \to K^{\omega'}$. 根据引理 2.5，有

$$\pi^*(\mathfrak{z}^p \cup \mathfrak{z}^q) = \pi^*\mathfrak{z}^p \cup \pi^*\mathfrak{z}^q, \tag{9}$$

$$\pi'^*(\mathfrak{z}^p \cup' \mathfrak{z}^q) = \pi'^*\mathfrak{z}^p \cup \pi'^*\mathfrak{z}^q, \tag{10}$$

这里左端的两个上积 $\cup$, $\cup'$ 是分别根据 ω, ω' 得到的，而右端的

两个 ∪ 都是根据 $Sd^{\varphi}K$ 的自然顺序得到的.

根据例 IV.4.4, 例 IV.4.5, 定理 IV.4.1 以及命题 V.2.6,

$$\pi^* = \pi'^*: H^q(L) \to H^q(K)$$

都是同构. 于是式(9)与式(10)的右端相同; 这就给出

$$\pi^*(\mathfrak{z}^p \cup \mathfrak{z}^q) = \pi'^*(\mathfrak{z}^p \cup' \mathfrak{z}^q).$$

再应用 π^* 与 π'^* 是相同的同构, 就得到式(8). ▌

因为一个单纯映射, 在取定复形的适当顺序后, 总是一个保序的单纯映射, 所以本定理与引理 2.5 的结合, 成为下面的推论.

2.7 推论　如果 $f: K \to L$ 是单纯映射, 则

$$f^*: H^*(L) \to H^*(K)$$

是环同态. ▌

从定理 2.6 与引理 2.5, 还可以得到下面的重要结论, 说明上同调环虽接近于是可交换的, 但不是交换环.

2.8 定理(上同调环的交换规律)　对于任意 $\mathfrak{z}^p \in H^p(K)$, $\mathfrak{z}^q \in H^q(K)$,

$$\mathfrak{z}^p \cup \mathfrak{z}^q = (-1)^{pq} \mathfrak{z}^q \cup \mathfrak{z}^p. \tag{11}$$

证　明　虽然已有定理 2.6, 但在实际计算上积时, 我们还要用 K 的顺序. 设 ω 是 K 的一个给定的顺序. 把 ω 这个顺序完全颠倒过来, 得到 K 的一个新顺序, 记作 ω'. 容易看出, 如果 $a^0a^1\cdots a^r$ 是 K^ω 的任意一个 r 维有序单形, 则它与 $K^{\omega'}$ 的有序单形 $a^r\cdots a^1a^0$ 的关系如下:

$$a^0a^1\cdots a^r = \lambda(r)a^r\cdots a^1a^0, \quad \lambda(r) = (-1)^{\frac{1}{2}r(r+1)}.$$

现在仍把根据 ω 与 ω' 得到的上积运算分别记作 ∪ 与 ∪′. 我们先证明

$$z^p \cup' z^q = (-1)^{pq} z^q \cup z^p, \tag{12}$$

这里 z^p, z^q 是上闭链. 事实上, 设 $r = p+q$, 则因为整数环 J 是交换的,

$$\langle z^p \cup' z^q,\ a^0a^1\cdots a^{p+q}\rangle$$
$$=\langle z^p \cup' z^q,\ \lambda(p+q)a^{p+q}\cdots a^1a^0\rangle$$
$$=\lambda(p+q)\langle z^p,\ a^{p+q}\cdots a^q\rangle\langle z^q,\ a^q\cdots a^0\rangle$$
$$=\lambda(p+q)\langle z^q,\ a^q\cdots a^0\rangle\langle z^p,\ a^{p+q}\cdots a^q\rangle$$
$$=\lambda(p+q)\lambda(q)\lambda(p)\langle z^q,\ a^0\cdots a^q\rangle\langle z^p,\ a^q\cdots a^{p+q}\rangle.$$

因为 $\lambda(p+q)\lambda(q)\lambda(p)=(-1)^{pq}$，所以式(12)成立.

然后，根据定理 2.6 中的式(8)与现在的式(12)，

$$\mathfrak{z}^p \cup \mathfrak{z}^q = \mathfrak{z}^p \cup' \mathfrak{z}^q = (z^p \cup' z^q)^* = (-1)^{pq}(z^q \cup z^p)^*$$
$$=(-1)^{pq}\mathfrak{z}^q \cup \mathfrak{z}^p. \ ▮$$

本定理的结论(11)是对于上同调类说的. 如果把上同调类改为上闭链，则改后的式(11)不必成立. (复习题.)

如果把系数环 J 改为具有单位元素的交换环，则本定理仍成立. 本节中的其他讨论，全部适用于具有单位元素的一般环 $\mathfrak{R}$.

例 2.5 环面 T(例 V.2.4)与 $S^1\vee S^2\vee S^1$(V §2 中习题 1)的整上同调环. T 与 $S^1\vee S^2\vee S^1$ 的各维上同调群都同构. 从上链的上积的定义，容易知道，T 的一维上同调群的两个生成元的上积 $\mathfrak{z}_1^1 \cup \mathfrak{z}_2^1$ 就是二维上同调群的一个生成元，而 $S^1\vee S^2\vee S^1$ 的一维上同调群的两个生成元的上积是零. 因而这两个上同调环非环同构.

上同调环的不变性 在已经有了上同调群的不变性时(V §2 末尾)，现在上同调环不变性的证明是很简单的. 这是由于上同调环的特殊结构：上同调环是从上同调群的直和与直和中的上积运算得到的.

设 K 与 L 是两个复形. 它们的上同调群的直和是群 $\sum H^q(K)$ 与 $\sum H^q(L)$，而它们的上同调环是 $H^*(K)$ 与 $H^*(L)$. 上同调群的重分不变性是说，当 $L=SdK$ 时，存在上同调群间的同构 $\pi^*: H^q(K)\approx H^q(SdK)$，这里的 π 是标准链映射. 这时候，π^* 明显地是直和间的同构：$\sum H^q(K)\approx \sum H^q(SdK)$，即一一的满同态. 因而根据环同构的定义(§1 末尾)，只需要证明 π^* 保持上积. (复习题.)但 π^* 保持上积是引理 2.5(与定理 2.6，推论 2.7)的推论(参看定理 2.6 的证明). 这就证明了 π^* 是环同构，因而证明了

上同调环的重分不变性. 当然, Sd^* 是环同构 π^* 的逆.

上同调环的拓扑不变性也能同样地证明. 事实上, 在证明上同调群的拓扑不变性时(V § 2 末尾), 第二步中所用的 $f^{(r)*}$ 与 $Sd^{(r)*}$, 分别根据引理 2.5 与刚证明的环同构 Sd^*, 都保持上积.

上同调环的伦型不变性的证明, 留给读者.

习 题

1. 如果整上同调环的任意两个(都非单位元素的整数倍的)元素的上积都是零,我们就说这个环是平庸的.

试说明 III § 4 的七个例子中的复形以及三维的射影空间与透镜空间(V § 6 中的习题 4) 的整上同调环都是平庸的.

2. 试给出一个简单的复形, 它的整上同调群与给定的任一(能或不能定向的)闭曲面的相同(参看例 2.5 与 V § 6 中的习题 2). 能否断定它们的整上同调环不相同?

3. 试讨论三个圆周的乘积 T^3 (V § 6 中习题 3) 的整上同调环.

4. 试讨论如何定义相对上链的上积, 因而得到相对上同调环 $H^*(K, L)$.

3. 卡 积

对于有序复形 K^ω, 我们能定义(以整数为系数的)上链与下链之间的另一种乘积运算,叫作卡积. 它与上积不同;我们不能通过它得到一个环. 但它所引出的上同调类与下同调类之间的运算,对于下一节中的交环的讨论有重要作用.

有序复形上的卡积 设 $x^p \in C^p(K)$, $y_q \in C_q(K)$. x^p 与 y_q 的卡积,记作

$$x^p \cap y_q,$$

是复形 K 的一个 $q-p$ 维下链, $\in C_{q-p}(K)$, 定义如下. 首先,

$$x^p \cap y_q = 0, \quad 当\ p > q.$$

其次，设 $p \leqslant q$. 当 y_q 是 K^ω 的任一 q 维有序单形 $a^{j_0}a^{j_1}\cdots a^{j_q}$ 时，

$$x^p \cap a^{j_0}a^{j_1}\cdots a^{j_q} = \langle x^p,\ a^{j_{q-p}}\cdots a^{j_q}\rangle a^{j_0}\cdots a^{j_{q-p}}. \tag{1}$$

然后通过线性扩张得到一般的 $x^p \cap y_q$. 所以，卡积也是双线性函数，即卡积运算满足分配律.

如果同定义上积时那样，把 K 上的上链也看成 K^ω 的有序单形的线性组合，而且如果 $a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_p}$ 是 K^ω 的有序单形，则从式(1)也得到下面简单的说法：

$$a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_p} \cap a^{j_0}a^{j_1}\cdots a^{j_q} = \begin{cases} a^{j_0}a^{j_1}\cdots a^{j_{q-p}}, & 当\ p \leqslant q,\ 而且\ a^{i_0} = a^{j_{q-p}}, \\ \quad a^{i_1} = a^{j_{q-p+1}},\ \cdots,\ a^{i_p} = a^{j_q}, & \\ 0, & 在其他情形; \end{cases} \tag{2}$$

然后作双线性扩张. 式(2)可以看作是说：有尾部(指 $a^{i_0}a^{i_1}\cdots a^{i_p}$)的，截去尾部；无尾部的，全部抹掉.

例 3.1 设 K 是 $s^2 = (a^0,\ a^1,\ a^2)$ 的闭包复形，ω 是整体顺序 $a^0 < a^1 < a^2$. 设一维上链 $x^1 = a^0a^1 + a^1a^2$ 与二维下链 $y_2 = a^0a^1a^2$. 根据式(2)的计算法，

$$x^1 \cap y_2 = a^0a^1.$$

如果改用整体顺序 ω': $a^1 < a^2 < a^0$，则这两个链应改写成 $x^1 = -a^1a^0 + a^1a^2$, $y_2 = a^1a^2a^0$. 把根据 ω' 来作的卡积运算记作 $\cap'$，则

$$x^1 \cap' y_2 = 0.$$

从卡积的定义，还容易直接验证下列关系：

$$x^p \cap (x^q \cap y_r) = (x^p \cup x^q) \cap y_r, \tag{3}$$

$$e^0 \cap y_q = y_q, \tag{4}$$

$$\mathrm{In}(x^p \cap y_p) = \langle x^p,\ y_p\rangle, \tag{5}$$

$$\langle x^p,\ x^q \cap y_{p+q}\rangle = \langle x^p \cup x^q,\ y_{p+q}\rangle. \tag{6}$$

3.1 命题(卡积的下边缘公式)

$$\partial(x^p \cap y_q) = (-1)^{q-p}\delta x^p \cap y_q + x^p \cap \partial y_q.$$

证 明 在$p\geqslant q$时，这边缘公式明显地成立. 设$p<q$. 这时候，只须证明，当y_q是K^ω的任一q维有序单形$a^0a^1\cdots a^q$时，这公式成立. 直接从定义计算(参看本节习题1)，有

$$\begin{aligned}
x^p\cap\partial a^0a^1\cdots a^q&=\sum_{k=0}^{q}(-1)^k x^p\cap a^0\cdots\hat{a}^k\cdots a^q\\
&=\sum_{k=0}^{q-p}(-1)^k\langle x^p,\ a^{q-p}\cdots a^q\rangle a^0\cdots\hat{a}^k\cdots a^{q-p}\\
&\quad+\sum_{k=q-p-1}^{q}(-1)^k\langle x^p,\ a^{q-p-1}\cdots\hat{a}^k\cdots a^q\rangle a^0\cdots a^{q-p-1}\\
&=\partial\langle x^p,\ a^{q-p}\cdots a^q\rangle a^0\cdots a^{q-p}\\
&\quad+(-1)^{q-p-1}\langle x^p,\ \partial a^{q-p-1}\cdots a^q\rangle a^0\cdots a^{q-p-1}\\
&=\partial(x^p\cap a^0\cdots a^q)+(-1)^{q-p-1}\delta x^p\cap a^0\cdots a^q.
\end{aligned}$$ ▌

然后，相当于引理2.2与定理2.3，有

3.2 引理 上闭链$\cap$下闭链=下闭链，

上边缘$\cap$下闭链=下边缘，

上闭链$\cap$下边缘=下边缘. ▌

3.3 定理 上闭链与下闭链的卡积的下同调类，由前一个因子的上同调类与后一个因子的下同调类完全决定. ▌

根据本定理，能定义上同调类$\mathfrak{z}^p$与下同调类$\mathfrak{z}_q$的卡积为

$$\mathfrak{z}^p\cap\mathfrak{z}_q=(z^p\cap z_q)^*.$$

如同链的卡积运算一样，同调类的卡积运算也满足分配律，而且有与式(3)到式(6)的相应关系. 在这意义下，我们说卡积把$H^q(K)$与$H_p(K)$配对到$H_{q-p}(K)$.

保序的单纯映射·复形上的卡积 本节中前此的讨论都是关于有序复形K^ω的. 现在仍用有序复形. 下面的永恒公式，相当于命题2.4.

3.4 命题(永恒公式)　设 $\underline{f}: K \to L$ 是单纯映射，而且 $\underline{f}: K^{\omega} \to L^{\rho}$ 是保序的. 则对于任意 $x^p \in C^p(L)$, $y_q \in C_q(K)$,

$$f(f^{\cdot} x^p \cap y_q) = x^p \cap f y_q.$$

证　明　对于任意 $x^{q-p} \in C^{q-p}(L)$,

$$\begin{aligned}\langle x^{q-p}, f(f^{\cdot} x^p \cap y_q)\rangle &= \langle f^{\cdot} x^{q-p}, f^{\cdot} x^p \cap y_q\rangle \\ &= \langle f^{\cdot} x^{q-p} \cup f^{\cdot} x^p, y_q\rangle = \langle f^{\cdot}(x^{q-p} \cup x^p), y_q\rangle \\ &= \langle x^{q-p} \cup x^p, f y_q\rangle = \langle x^{q-p}, x^p \cap f y_q\rangle\end{aligned}$$

(参看 V §2 中习题 2). ▌

这里的永恒公式与下面的公式类似. 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个单值的满对应. 则对于任意子集 $A \subset X$, $B \subset Y$,

$$f(f^{-1} B \cap A) = B \cap f A.$$

从本命题出发，完全仿照上一节中关于上积的讨论，依次得到下列二结果.

3.5 引理　设 $\underline{f}: K \to L$ 是单纯映射，而且 $\underline{f}: K^{\omega} \to L^{\rho}$ 是保序的. 则对于任意 $\ddot{x}^p \in H^p(L)$, $\ddot{y}_q \in H_q(K)$,

$$f_*(f^* \ddot{x}^p \cap \ddot{y}_q) = \ddot{x}^p \cap f_* \ddot{y}_q. \ ▌$$

3.6 定理　复形 K 的上同调类与下同调类的卡积不依赖于所取的顺序 ω, 由 K 完全决定. ▌

然后，在定理 3.6 的基础上，知道: 如果把引理 3.5 中的"而且 $\underline{f}: K^{\omega} \to L^{\rho}$ 是保序的"删去，改后的命题仍旧成立.

习　题

1. 设 K 是: 1) 例 V.2.4 中的环面, 2) V §2 习题 1 中的射影平面. 试计算卡积

$$H^*(K) \cap H_*(K) \to H_*(K).$$

2. 试用式(6), 来从上积的边缘公式得到卡积的边缘公式.

3. 试证定理 3.6.

4. 设引理 3.5 中的单纯映射是一个标准映射 $\pi: SdK \to K$. 试证: 1)对于任意 $\ddot{x}^p \in H^p(SdK)$, $\ddot{y}_q \in H_q(SdK)$,

$$\pi_*(\ddot{x}^p \cap \ddot{y}_q) = Sd^* \ddot{x}^p \cap \pi_* \ddot{y}_q;$$

2) 对于任意 $\ddot{x}^p \in H^p(K)$, $\ddot{y}_q \in H_q(K)$,

$$Sd_*(\ddot{x}^p \cap \ddot{y}_q) = \pi^* \ddot{x}^p \cap Sd_* \ddot{y}_q.$$

4. 闭组合流形的交环

本节只限于讨论 n 维的闭组合流形. 我们把它简称作流形. 本节的主要目的是定义能定向的流形 M 的、以整数为系数的交环. 我们先定义 M 的两个下同调类的交(式(12)), 然后通过卡积与对偶同构之间的关系(命题 4.4 到 4.8), 得到交运算与上积之间的关系(定理 4.9), 从而同时证明下列两事实: 交运算给出 M 的交环, 而且在对偶同构下, M 的交环与 M 的上同调环环同构(推论 4.10).

在本节的末尾才提到不能定向的流形.

从 $\sigma(s^{n-p})$ 与 Sds^q 的交出发　在无相反的申明时, 我们都设 M 是能定向的 n 维闭组合流形. 从定义上积与卡积的经验, 我们自然会想到, 要想定义两个下同调类的交, 必须从定义两个下链的交出发. 在本章开始时, 我们就说过, 我们不能定义一般复形的交环, 只能定义流形的交环. 原因是流形 M, 而非一般复形, 有对偶性质; 而流形 M 的对偶性质, 在我们即将给出的下链的交的定义中就占有中心的地位.

对于流形 M, SdM 有两个对偶的块形剖分 $\overset{*}{B}$ 与 B. 设 M 的有向单形的一个基本组是 $\{s_i^q\}$, 使得 M 的基本闭链是

$$z_n = \sum s_i^n.$$

设 s^{n-p} 与 s^q 是基本组的任意 $n-p$ 维与 q 维成员. 我们的出发点是

讨论分别从 $\overset{*}{B}$ 与 B 得来的有向块形 $\sigma(s^{n-p})$ 与 Sds^q 的交．为此，先写下 V §7 中的式(2)与式(5)，分别作为下面的式(1)与式(2)：

$$Sds^q=\sum[s^q:t^{q-1}]\cdots[t^1:t^0]\dot{s}^q\dot{t}^{q-1}\cdots\dot{t}^0, \tag{1}$$

这里的和号是对于 M 的所有真序列(其中 $\underline{s}^q$ 固定)

$$\underline{t}^0\prec\underline{t}^1\prec\cdots\prec\underline{t}^{q-1}\prec\underline{s}^q$$

展开的；

$$\sigma(s^{n-p})=\sum[t^n:t^{n-1}]\cdots[t^{n-p+1}:s^{n-p}]\dot{t}^n\cdots\dot{t}^{n-p+1}\dot{s}^{n-p}, \tag{2}$$

这里的和号是对于 M 的所有真序列(其中 $\underline{s}^{n-p}$ 固定)

$$\underline{s}^{n-p}\prec\underline{t}^{n-p+1}\prec\cdots\prec\underline{t}^n$$

展开的．从式(1)容易得到

$$Sdz_n=\sum[s_i^n:t^{n-1}]\cdots[t^1:t^0]\dot{s}_i^n\dot{t}^{n-1}\cdots\dot{t}^0, \tag{3}$$

这里的和号是对于 M 的所有真序列

$$\underline{t}^0\prec\underline{t}^1\prec\cdots\prec\underline{t}^{n-1}\prec\underline{s}_i^n$$

展开的．明显地，作为点集时，式(1)与(2)中的一般项的交是一个单形($\dot{s}^q$, $\dot{t}^{q-1}$, $\cdots$, $\dot{t}^{n-p+1}$, $\dot{s}^{n-p}$)或空集，按照是否 $\underline{s}^{n-p}\prec\underline{s}^q$．于是我们用下面的式子来定义 $\sigma(s^{n-p})$ 与 Sds^q 的**交链**，记作 $\sigma(s^{n-p})$ $\#Sds^q$：

$$\sigma(s^{n-p})\#Sds^q=\begin{cases}\sum[s^q:t^{q-1}]\cdots[t^{n-p+1}:s^{n-p}]\dot{s}^q\dot{t}^{q-1}\cdots\dot{t}^{n-p+1}\dot{s}^{n-p}, \\ \qquad \text{当 } \underline{s}^{n-p}\prec\underline{s}^q, \\ 0, \quad \text{当 } \underline{s}^{n-p}\not\prec\underline{s}^q,\end{cases} \tag{4}$$

这里的和号是对 M 的所有真序列(其中 $\underline{s}^q$, $\underline{s}^{n-p}$ 固定)

$$\underline{s}^{n-p}\prec\underline{t}^{n-p+1}\prec\cdots\prec\underline{t}^{q-1}\prec\underline{s}^q$$

展开的．这个交链是 SdM 上的 $p+q-n$ 维链，不依赖于 t^{q-1}, $\cdots$, t^{n-p+1} 的定向，而由 s^{n-p} 与 s^q 完全决定．再把式(4)作双线性扩张．然后，对于 $C_p(\overset{*}{B})$ 的任一链 ξ_p 与 $C_q(M)$ 的任一链 x_q 的重分 $Sdx_q\in C_q(SdM)$，有了**交链**

$$\xi_p\#Sdx_q\in C_{p+q-n}(SdM). \tag{4'}$$

这里有下面三个值得提出的特例:

$$\sigma(s^q)\#Sd(\pm s^q)=\pm\overset{*}{s}{}^q, \tag{5}$$

$$\sigma(s^{n-p})\#Sdz_n=\sigma(s^{n-p}), \tag{6}$$

$$\sum_i\sigma(s_i^0)\#Sds^q=Sds^q. \tag{7}$$

还值得注意,把 $\sum_i\sigma(s_i^0)$ 看作是 SdM 上的链时,它就是 Sdz_n.

4.1 命题(交链的下边缘公式)

$$\partial(\xi_p\#Sdx_q)=(-1)^{n-q}\partial\xi_p\#Sdx_q+\xi_p\#\partial Sdx_q.$$

证　明　只须证明

$$\partial(\sigma(s^{n-p})\#Sds^q)$$
$$=(-1)^{n-q}\partial\sigma(s^{n-p})\#Sds^q+\sigma(s^{n-p})\#\partial Sds^q. \tag{8}$$

当 $\underline{s}^{n-p}\nprec\underline{s}^q$, 则 $\underline{s}^{n-p}$ 也 $\nprec\partial s^q$ 中任一 $q-1$ 维单形, 而且 δs^{n-p} 中任一 $n-p+1$ 维单形也 $\nprec\underline{s}^q$; 所以这时候,根据定义与引理 V.7.5 中的式(7),这里的式(8)中每一个交都是零.

设 $s^{n-p}\prec s^q$. 我们用引理 V.7.5 的证法, 来计算下列三种 $p+q-n-1$ 维单形在式(4)的边缘 $\partial(\sigma(s^{n-p})\#Sds^q)$ 中的系数.

1) 单形 $\overset{*}{s}{}^q\cdots\overset{*}{t}{}^k\cdots\overset{*}{s}{}^{n-p}$, $q>k>n-p$. 它的系数是零, 与引理 V.7.5 的证明中情形 1) 相似.

2) 单形 $\overset{*}{s}{}^q\cdots\overset{*}{t}{}^{n-p+1}$. 它的系数是 $(-1)^{p+q-n}[s^q:t^{q-1}]\cdots[t^{n-p+1}:s^{n-p}]$. 这种单形对于 $\partial(\sigma(s^{n-p})\#Sds^q)$ 的贡献是

$$(-1)^{p+q-n}\sum[t^{n-p+1}:s^{n-p}]\sum[s^q:t^{q-1}]\cdots[t^{n-p+2}:t^{n-p+1}]\overset{*}{s}{}^q\overset{*}{t}{}^{q-1}\cdots\overset{*}{t}{}^{n-p+1}$$
$$=(-1)^{p+q-n}\sum[t^{n-p+1}:s^{n-p}]\sigma(t^{n-p+1})\#Sds^q;$$

根据引理 V.7.5 中的式(6),这就是这里的式(8)右端的第一个交.

3) 单形 $\overset{*}{t}{}^{q-1}\cdots\overset{*}{s}{}^{n-p}$. 它的系数是 $[s^q:t^{q-1}]\cdots[t^{n-p+1}:s^{n-p}]$. 这种单形对于 $\partial(\sigma(s^{n-p})\#s^q)$ 的贡献明显地是式(8)右端的第二个交. ▌

从本命题立刻得到下面的引理.

4.2 引理

$\overset{*}{B}$ 上的下闭链 $\#M$ 上的下闭链的重分 $=SdM$ 上的下闭链,
$\overset{*}{B}$ 上的下边缘 $\#M$ 上的下闭链的重分 $=SdM$ 上的下边缘,
$\overset{*}{B}$ 上的下闭链 $\#M$ 上的下边缘的重分 $=SdM$ 上的下边缘.]

如同根据引理2.2,我们得到了两个上同调类的上积,现在根据本引理,我们能定义 $\overset{*}{B}$ 的下同调类 ζ_p 与 M 的下同调类 $\overset{*}{z}_q$ 的重分 $(Sdz_q)^*$ $(\in H_q(SdM))$ 的交:

$$\zeta_p \# (Sdz_q)^* = (\zeta_p \# Sdz_q)^* \in H_{p+q-n}(SdM), \qquad (9)$$

这里的下闭链 ζ_p 是 $\sigma(s_i^{n-p})$ 的一个线性组合,而 z_q 是 s_i^q 的.

流形 M 的下同调类的交 现在要在式(9)的基础上,来定义流形 M 的下同调类的交. 为着这个目的以及下文的需要,先写下定理 V.7.6 中的对偶同构 $\varDelta=\pi_* i_* \sigma_*$ ($\varDelta$ 的三个因子都是同构):

$$\varDelta: H^q(M) \xrightarrow{\sigma_*} H_{n-q}(\overset{*}{B}) \xrightarrow{i_*} H_{n-q}(SdM) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-q}(M). \quad (10)$$

我们还要注意,在本节的前此讨论中,我们已把 $\sigma(s^{n-p})$, ζ_p 看成 SdM 上的链,那就是说,已把它们看成 $i\sigma(s^{n-p})$, $i\zeta_p$ 的简写. 我们还将如此作.

设 $\overset{*}{z}_p$ 与 $\overset{*}{z}_q$ 是流形 M 的 p 维与 q 维的下同调类. 因为式(10)中的诸同构,存在 $\overset{*}{B}$ 的唯一的下同调类 ζ_p, 使得

$$\zeta_p = \sigma_* \varDelta^{-1} \overset{*}{z}_p, \quad \overset{*}{z}_p = \varDelta \sigma_*^{-1} \zeta_p = \pi_* \zeta_p, \qquad (11)$$

这里的 $\pi_* \zeta_p$ 是 $\pi_* i_* \zeta_p$ 的简写. 然后我们得到下面的定义.

4.3 定义 能定向的流形 M 的两个整下同调类 $\overset{*}{z}_p$ 与 $\overset{*}{z}_q$ 的交是

$$\overset{*}{z}_p \# \overset{*}{z}_q = \pi_*(\zeta_p \# (Sdz_q)^*) \in H_{p+q-n}(M), \qquad (12)$$

这里的式(12)右端的 π_* 是标准同构.

交运算的完全说明还包含式(11), (9), (4′)与(4).

本定义中的交运算,是否使得 M 的整下同调群的直和

$\sum H_q(M)$ 形成一个环呢？答案是肯定的；但证明不是直接验证交运算具有环所要求的性质，而是通过交运算与上积的对偶之间的关系以及下面的对偶同构与卡积之间的关系.

对偶同构与卡积　卡积与上积的具体计算，都需要先有顶点的顺序. SdM 已有自然顺序，所以有有序复形 $Sd^{\varphi}M$. 注意，我们的式(1)到式(4)中的链，都是 $Sd^{\varphi}M$ 的有序单形的线性组合. 为着达到我们现在的目的，关键是下述引理.

4.4 引理　设 ω 是 M 的一个顺序，

$$\underline{\pi}: Sd^{\varphi}M \to M^{\omega}$$

是例 2.4 中那唯一的保序标准映射，而且 s^p 是 M^{ω} 的任一 p 维有序单形(作为上链). 则

$$\pi^{\cdot}s^p = [s^p : s^{p-1}]\cdots[s^1 : s^0]\dot{s}^p\dot{s}^{p-1}\cdots\dot{s}^0 + \cdots; \tag{13}$$

这里的 s^{p-i} 的顶点恰是 s^p 的最后 $p-i+1$ 个顶点，因而

$$[s^p : s^{p-1}]\cdots[s^1 : s^0] = 1; \tag{14}$$

而且未写出的部分是 $Sd^{\varphi}M$ 的、非形如

$$\dot{t}^p\dot{t}^{p-1}\cdots\dot{t}^0$$

的有序单形的线性组合.

证　明　根据 $\pi^{\cdot}$ 的定义，对于 $Sd^{\varphi}M$ 的形如 $\dot{t}^p\dot{t}^{p-1}\cdots\dot{t}^0$ 的有序单形，

$$\langle \pi^{\cdot}s^p,\ \dot{t}^p\dot{t}^{p-1}\cdots\dot{t}^0\rangle = \langle s^p,\ \pi\dot{t}^p\dot{t}^{p-1}\cdots\dot{t}^0\rangle. \tag{15}$$

首先，我们说，在 $Sd^{\varphi}M$ 的这种的诸 p 维有序单形中，恰有一个使得式(15)非零. 事实上，$\pi\dot{t}^p\dot{t}^{p-1}\cdots\dot{t}^0$ 是 t^p 上的一个 p 维链，即 t^p 的一个整数倍. 根据例 2.4 中 $\underline{\pi}$ 的定义，如果 $t^p \neq s^p$，即如果 $\dot{t}^p \neq \dot{s}^p$，则式(15)为零. 这就说明所求的 $t^p = s^p$.

其次，因为才证了的结果，为着求得使式(15)非零的 $\dot{s}^p\dot{t}^{p-1}\cdots\dot{t}^0$，只须考虑在 Sds^p 中出现的单形(参看式(1)). 根据 $\underline{\pi}$ 的定义，

$$\pi \check{s}^p \check{t}^{p-1} \cdots \check{t}^0 = s^p, \tag{16}$$

当而且只当 t^{p-i} 的顶点是 s^p 的最后 $p-i+1$ 个顶点.

命这样的 t^{p-i} 为 s^{p-i}. 显然由于 $[s^p:s^{p-1}]=\cdots=[s^1:s^0]=1$, 有式(14). 然后上文关于式(15)非零的讨论，给出式(14)的条件下的式(13). ▌

参看习题1.

4.5 命题 在引理4.4的假设下，

$$\sigma(s^p)=\pi^{\cdot}s^p \cap Sdz_n.$$

证 明 从式(2)以及应用卡积的定义到命题4.4中的式(13)与式(3). ▌

4.6 定理 设 M 是能定向的 n 维闭组合流形，而且它的基本闭链是 z_n. 则定理V.7.6中的对偶同构 $\Delta: H^q(M)\approx H_{n-q}(M)$ 可用卡积表出：

$$\Delta: \mathfrak{z}^q \to \mathfrak{z}^q \cap \mathfrak{z}_n.$$

证 明 因为 $\sigma(s^q)$ 是 $i\sigma(s^q)$ 的简称，根据命题4.5与命题3.4,

$$\pi i\sigma(s^q)=\pi(\pi^{\cdot}s^q \cap Sdz_n)=s^q \cap z_n.$$

于是，从同调类的卡积的定义，

$$\Delta\mathfrak{z}^q=(\pi i\sigma(z^q))^*=(z^q \cap z_n)^*=\mathfrak{z}^q \cap \mathfrak{z}_n. \quad ▌$$

注意，这证明中的 π 虽是例2.4中那唯一的保序标准映射 π 所诱导出的链映射，但从例IV.4.5与定理V.3.6, 本定理的结论是不依赖于顶点的顺序的.

如同命题4.5的证明那样，从式(3)以及应用卡积的定义到式(13)与式(1)，我们得到下面的命题.

4.7 命题 在引理4.4的假设下，

$$\sigma(s^{n-p}) \# Sds^q=\pi^{\cdot}s^{n-p} \cap Sds^q. \quad ▌$$

4.8 命题 对于 $\mathfrak{z}^{n-p}\in H^{n-p}(M)$, $\mathfrak{z}_q\in H_q(M)$,

$$\Delta\ddot{z}^{n-p}\#\ddot{z}_q=\ddot{z}^{n-p}\cap\ddot{z}_q.$$

证 明 首先，注意 $\Delta\ddot{z}^{n-p}=\pi_*i_*\sigma_*\ddot{z}^{n-p}=\pi_*i_*\ddot{\sigma}(z^{n-p})$，这里 $\ddot{\sigma}(z^{n-p})$ 即 $(\sigma(z^{n-p}))^*$，以及 $i_*\ddot{\sigma}(z^{n-p})$ 简称为 $\ddot{\sigma}(z^{n-p})$. 然后根据式(12)，式(9)，命题 4.7，命题 3.4 与同调类的卡积定义，依次有下列等式：

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{z}^{n-p}\#\ddot{z}_q&=\pi_*(\ddot{\sigma}(z^{n-p})\#Sd\ddot{z}_q)=\pi_*(\sigma(z^{n-p})\#Sdz_q)^*\\&=(\pi(\pi' z^{n-p}\cap Sdz_q))^*=(z^{n-p}\cap z_q)^*\\&=\ddot{z}^{n-p}\cap\ddot{z}_q.\ \rbrack\end{aligned}$$

交环 有了定理 4.6 与命题 4.8，很容易证明本节的主要定理：

4.9 定理 设 M 是能定向的 n 维闭组合流形，而且 Δ 是 M 上的对偶同构. 则对于 $\ddot{z}^{n-p}$, $\ddot{z}^{n-q}\in H^*(M)$,

$$\Delta\ddot{z}^{n-p}\#\Delta\ddot{z}^{n-q}=\Delta(\ddot{z}^{n-p}\cup\ddot{z}^{n-q}).$$

证 明 根据命题 4.8，定理 4.6，§3 中的式(3)，以及再一次命题 4.8，依次有下列等式：

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{z}^{n-p}\#\Delta\ddot{z}^{n-q}&=\ddot{z}^{n-p}\cap\Delta\ddot{z}^{n-q}=\ddot{z}^{n-p}\cap(\ddot{z}^{n-q}\cap\ddot{z}_n)\\&=(\ddot{z}^{n-p}\cup\ddot{z}^{n-q})\cap\ddot{z}_n=\Delta(\ddot{z}^{n-p}\cup\ddot{z}^{n-q}).\ \rbrack\end{aligned}$$

4.10 推论 在定理 4.9 的假设下，由式(12)定义的交运算 $\#$，把 M 的下同调群的直和 $\sum H_q(M)$ 变成一个环 $H_*(M)$，具有单位元素 $\ddot{z}_n$，而且对偶同构

$$\Delta: H^*(M)\approx H_*(M)$$

是环同构.]

环 $H_*(M)$ 叫作 M 的**交环**或**下同调环**.

能定向的与不能定向的流形 同在 V§7 的末尾一样，如果改用系数环 J_2 来替代 J，则不必假设 M 是能定向的. 然后有下

列结果.

4.11 定理 设 M 是 n 维的闭组合流形，而且它的模 2 基本闭链是 z_n. 则定理 V.7.8 中的对偶同构 $\Delta: H^q(M;\ J_2) \approx H_{n-q}(M;\ J_2)$ 可用卡积表出：

$$\Delta: \bar{z}^q \to \bar{z}^q \cap \bar{z}_n. \quad \rule{1ex}{1.5ex}$$

4.12 定理 在定理 4.11 的假设下，由式(9)定义的交运算 $\#$，系数取模 2 后，把 M 的模 2 下同调群的直和变成一个环 $H_*(M; J_2)$，具有单位元素 $\bar{z}_n$. 而且对偶同构

$$\Delta: H^*(M; J_2) \approx H_*(M; J_2)$$

是环同构. ▌

例 4.1 本例给出定理 4.6 与引理 3.5 (永恒公式)的一个应用.

设 K 是复形，M 是能定向的 n 维闭组合流形，而且 $f: K \to M$ 是一个单纯映射. 如果 $f_*: H_n(K) \to H_n(M)$ 是满同态，则对于每一个 q，$f_*: H_q(K) \to H_q(M)$ 也是满同态.

证 明 设 z_n 是 M 的一个基本闭链. 根据假设，$H_n(K)$ 中有一个元素 $\bar{y}_n$，使得 $f_*\bar{y}_n = \bar{z}_n$. 现在我们的目的是，对于非零的 $H_q(M)$ 中的任一非零元素 $\bar{z}_q$，找到 $H_q(K)$ 的一个元素 $\bar{y}_q$，使得 $f_*\bar{y}_q = \bar{z}_q$. 考虑

$$H_q(M) \overset{\Delta^{-1}}{\approx} H^{n-q}(M) \xrightarrow{f^*} H^{n-q}(K) \xrightarrow{\cap \bar{y}_n} H_q(K).$$

从 $\bar{z}_q$，得到 $f^*\Delta^{-1}\bar{z}_q \cap \bar{y}_n$；这就是我们所找的元素，因为根据引理 3.5 与定理 4.6,

$$f_*(f^*\Delta^{-1}\bar{z}_q \cap \bar{y}_n) = \Delta^{-1}\bar{z}_q \cap f_*\bar{y}_n = \Delta^{-1}\bar{z}_q \cap \bar{z}_n = \Delta\Delta^{-1}\bar{z}_q = \bar{z}_q. \quad \rule{1ex}{1.5ex}$$

例 4.2 n 维射影空间 $P^n = |L^n|$ 的模 2 上同调环是 $J_2[x \mid x^{n+1} = 0]$ (见例 1.2).

例 V.6.5 与例 V.6.6 已经替本例作了下述的准备. 例 V.6.5 给出了 P^n 的单纯剖分 L^n. 例 V.6.6 证明了

$$H^q(L^n;\ J_2) \approx J_2, \quad 0 \leqslant q \leqslant n,$$

并且证明了，对于包含单纯映射 $i: L^{n-1} \to L^n$，

$$i_*: H_q(L^{n-1};\ J_2) \to H_q(L^n;\ J_2),$$
$$i^*: H^q(L^n;\ J_2) \to H^q(L^{n-1};\ J_2), \quad 0 \leqslant q \leqslant n-1,$$

都是同构；因为涉及的群都各恰有两个元素，所以 i_* 与 i^* 都分别把零或非零元素变成零或非零元素.

证　明　用归纳证法. 本例的命题对于一维射影空间显然成立. 假设它对于 $n-1$ 维射影空间成立；我们来证它对于 $n(>1)$ 维射影空间成立.

首先，设 $0\neq x\in H^1(L^n;J_2)$. 命 $x^q=x\cup x\cup\cdots\cup x$, $1<q<n$. 根据定理 2.7, i^* 是环同态，所以 $i^*(x^q)=(i^*x)^q$；根据 i^{1*} 是群同构，$i^*x\neq 0$；根据归纳假设，$(i^*x)^q\neq 0$；于是 $i^*(x^q)\neq 0$. 再根据 i^{q*} 是群同构，得到

$$0\neq x^q\in H^q(L^n;\ J_2),\quad 1\leqslant q\leqslant n-1.$$

其次，剩下要证的只是

$$0\neq x^n\in H^n(L^n;J_2).$$

命 $H^n(L^n;J_2)$ 与 $H^{n-1}(L^{n-1};J_2)$ 的非零元素分别为 α 与 β.（读者可设想 $n=2$, 因而有直观的图形帮助理解下面的证明.）把定理 4.11 应用到 L^n, 我们知道

$$x^n\neq 0\Leftrightarrow x^n\cap\alpha\neq 0,$$

而且 $x\cap\alpha\neq 0$. 因为，根据 § 3 中式(3)的推论（在系数群 J_2 时），

$$x^n\cap\alpha=(x^{n-1}\cup x)\cap\alpha=x^{n-1}\cap(x\cap\alpha),$$

我们进行如下. 根据 i_* 是群同构，$0\neq i_*\beta\in H^{n-1}(L^n;\ J_2)$；另一方面，已有 $0\neq x\cap\alpha\in H^{n-1}(L^n;\ J_2)$；所以 $x\cap\alpha=i_*\beta$. 因而

$$x^n\cap\alpha=x^{n-1}\cap i_*\beta.$$

于是归结到证明 $x^{n-1}\cap i_*\beta\neq 0$.

但根据定理 3.5,

$$x^{n-1}\cap i_*\beta=i_*(i^*x^{n-1}\cap\beta).$$

再根据 i_* 是群同构，我们知道

$$x^{n-1}\cap i_*\beta\neq 0\Leftrightarrow i^*x^{n-1}\cap\beta\neq 0;$$

于是又归结到证明 $i^*x^{n-1}\cap\beta\neq 0$. 现在，根据上文的结果 $x^{n-1}\neq 0$ 以及 i^* 是群同构，知道 $i^*x^{n-1}\neq 0$；再把定理 4.11 应用到 L^{n-1}, 得 $i^*x^{n-1}\cap\beta\neq 0$. 这就完全证明了：如果 $0\neq x\in H^1(L^n;J_2)$, 则

$$x^q\neq 0,\quad 1\leqslant q\leqslant n. \ ▌$$

习　题

1. 试用特例($n=2$, $p=1$)作图验证式(13)，并求出此特例的式(13)中

的未写出的部分.

2．试应用命题 4.7 与卡积的边缘公式，来证明命题 4.1 中的交链的边缘公式.

3．试求环面的交环.

在 $p+q=n$ 时，式(12)中的零维链 $\zeta_p \# Sdz_q$ 的指数叫作 ζ_p 与 Sdz_q 的**交点数**．试讨论：在式(12)中的 $\bar{z}_p$ 与 $\bar{z}_q$ 为环面的一维下同调群的生成元时，可能的、ζ_p 与 Sdz_q 的交点数.

4．沿用例 4.1 中的记号．试证：如果 $f_*:H_n(K)\to H_n(M)$ 非零同态，则或者 $f^*:H^q(M)\to H^q(K)$ 是单一的同态，或者 f^* 的核属于挠子群 $T^q(M)$.

从而试证 Betti 数之间的不等式：

$$R_q(K)\geqslant R_q(M).$$

因而推知：不存在从二维球 S^2 到二维环面 T^2 的单纯映射 f，使得 f_* 非零同态.

附录 A　綫性的欧几里得空間

解析几何教程[*)]中討論三維空間中的直綫与平面．本附录的目的是用同样的方式引进 n 維的欧几里得空間 E^n 中的 q 維超平面，$0\leqslant q\leqslant n$.

讀第三章 §1 时，需要本附录的知識.

1. 綫性空間

首先我們重述綫性代数[†)]中的綫性空間的定义．我們只限于实数域上的綫性空間；实数用希腊字母 λ, μ 等表示.

設 L 是一个集合，它的元素是 x, y, z, u 等．如果 L 滿足下列两組条件，它就叫作一个**綫性空間**或**向量空間**，它的元素叫作**点**或**向量**.

1° 对于 L 中的每一对元素 x 与 y, L 中有一个对应的元素 u, 叫作 x 与 y 的**和**，記作 $u=x+y$, 使得

1.1° 加法交換律成立：$x+y=y+x$;

1.2° 加法結合律成立：$x+(y+z)=(x+y)+z$;

1.3° 零元素存在：L 中恰有一元素 0，叫作零元素，它对于 L 中每一元素 x, 都具有 $x+0=x$ 这个性质；

1.4° 逆元素存在：对于 L 的每一元素 x, L 中恰有一个对应的元素 $-x$，叫作 x 的逆元素，具有性质 $x+(-x)=0$.

---

*) 例如吳光磊、丁石孙等，解析几何，人民教育出版社，1964.

†) 例如張禾瑞、郝鈵新，高等代数，人民教育出版社，1964.

2° 对于每一实数 λ 与 L 的每一元素 x, L 中有一个对应的元素 y, 叫作 λ 与 x 的**积**,記作 $y=\lambda x$, 使得

2.1° $1x=x$;

2.2° 乘法結合律成立: $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$;

2.3° 分配律成立:

$$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,\quad (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x.$$

其次,我們重述有关綫性空間的几个概念. 設 $x^1, x^2, \cdots, x^q$ 是綫性空間 L 中的一組元素,而且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ 是一組实数. 如果方程

$$\lambda_1x^1+\lambda_2x^2+\cdots+\lambda_qx^q=0$$

蘊涵

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_q=0,$$

这組元素就說是**綫性无关的**;否則就說是**綫性相关的**.

如果 L 中的綫性无关的元素的最多个数是 n, L 就說是 **n 維的**,記作 L^n.

L^n 中的一組綫性无关元素

$$e^1,\ e^2,\ \cdots,\ e^n \tag{1}$$

叫作 L^n 的一个**基**. L^n 的任一元素 x 可以唯一地表示成这些基元素的一个綫性組合

$$x=x_1e^1+x_2e^2+\cdots+x_ne^n,$$

这里的系数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实数. 这組有次序的实数叫作元素 x 的,对于基(1)的**坐标**,而且我們写作

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n).$$

如果 L_1 是 L^n 的一个子集,而且 L_1 本身也是一个綫性空間,則 L_1 叫作一个**綫性子空間**. L^n 的任一綫性子空間 L_1 显然包含 L^n 的零元素 0.

L^n 的一个綫性子空間 L_1 也有維数,設是 q. 然后 $0\leqslant q\leqslant n$.

例1　設 $E^n=(R^n, d)$ 是例1.1.1中的 n 維的欧几里得空間. E^n 的任意两个有次序的点 a 与 a' 决定一个有向綫段 $\overrightarrow{aa'}$. 对于 E^n 的任一有向綫段 $\overrightarrow{aa'}$ 与任一点 x, E^n 中存在唯一的一点 x', 使得有向綫段 $\overrightarrow{xx'}=\overrightarrow{aa'}$ (即这两个有向綫段平行,它們的长度相等,指向相同). 有向綫段的相等是一个等价关系;它把 E^n 中的所有的有向綫段分成等价类. 把有向綫段 $\overrightarrow{aa'}$ 的等价类記作 $\{\overrightarrow{aa'}\}$, 叫作一个向量(即所謂"自由向量"). 同时,当点 a 与 a' 重合时,我們还把 $\{\overrightarrow{aa'}\}$ 看作是一个向量,叫作零向量. E^n 中的全体向量組成一个 n 維的綫性空間 L^n.

2. 綫性的欧几里得空間·超平面

設 $E^n=(R^n, d)$ 是例1.1.1中的 n 維的欧几里得空間. 它的一个点是一組 n 个有次序的实数. 当綫性空間 L^n 中选定了一个基时, L^n 的一个点也可以看作是一組 n 个有次序的实数. 但 E^n 与 L^n 的区别在于 E^n 是几何的对象, 而 L^n 是代数的对象: E^n 的两点有距离, 而 L^n 的两点无距离; L^n 中有两种代数运算(两点的相加与点乘以实数), 而 E^n 中无代数运算. 我們現在就是要在 E^n 中也引进这两种代数运算,使得我們能更簡便地討論 E^n 的性质.

設 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 E^n 的任意两点, 而且 λ 是任意一个实数. 跟对于 L^n 的点一样, 我們現在对于 E^n 的点, 也定义

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$
$$\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

例2　跟通常一样,把 E^n 的原点記作 $O=(0, 0, \cdots, 0)$. E^n 中的每一个点 x 决定从原点 O 到点 x 的向量 $\overrightarrow{Ox}$, 通常叫作点 x 的"定位向量". 点 x 是它的定位向量的終点; 点 x 与定位向量 $\overrightarrow{Ox}$ 的坐标都是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 故所定义的点 $x+y$ 的定位向量 $\overrightarrow{O(x+y)}$ 恰等于 $\overrightarrow{Ox}+\overrightarrow{Oy}$, 而且所定义的点 λx 的定位向量 $\overrightarrow{O(\lambda x)}$ 恰等于 $\lambda\overrightarrow{Ox}$; 这就是說, 通过定位向量就得到两点的和 $x+y$ 与点乘实数的积 λx.

例 3 在欧几里得空間 E^n 中引进这两种代数运算后，能簡便地証明 E^n 滿足第三条度量公理：三角形不等式 $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

首先，在 n 維的 E^n 中引进通常解析几何教程中的內积的概念，把

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

叫作 E^n 中的点 x 与 y 的**內积**. 容易看出內积有下列四个性质：

$1°$ $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, 而且 $\langle x, x\rangle = 0$ 当而且只当 $x=0$;

$2°$ $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

$3°$ $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;

$4°$ $\langle x+x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$.

还有，从 d 的定义，有

$$d(x, y) = [\langle x-y, x-y\rangle]^{1/2}.$$

其次，命 $u=x-y$, $v=y-z$; 因而 $u+v=x-z$. 所以我們求証的三角形不等式等价于下列不等式：

$$[\langle u+v, u+v\rangle]^{1/2} \leqslant [\langle u, u\rangle]^{1/2} + [v, v]^{1/2}.$$

根据內积的后三个性质，有

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle;$$

再根据內积的第一个性质，我們可取上述不等式的两端的平方，得到

$$\langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \leqslant \langle u, u\rangle + 2[\langle u, u\rangle]^{1/2}[\langle v, v\rangle]^{1/2} + \langle v, v\rangle.$$

所以我們求証的三角形不等式又等价于下列 Schwarz 不等式：

$$\langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle.$$

最后，我們来証明 Schwarz 不等式，以完成我們的証明. 考虑 λ 的二次式

$$\langle u, u\rangle\lambda^2 + 2\langle u, v\rangle\lambda + \langle v, v\rangle.$$

它就是 $\langle \lambda u+v, \lambda u+v\rangle$, 而且 $\geqslant 0$, 因为內积的四个性质. 所以它的判别式

$$\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2 \geqslant 0;$$

这就是 Schwarz 不等式. ▌

具有这两种代数运算的欧几里得空間 E^n 叫作**綫性的欧几里得空間**，仍旧記作 E^n. 此后記号 E^n 指的总是綫性的、n 維的欧几里得空間，而且也把綫性的欧几里得空間簡称为欧几里得空間.

綫性的欧几里得空間 E^n 的点，在这两种代数运算下，也形成

一个(本附录开始时所定义的)綫性空間,我們把它記作 L^n. L^n 的每一个綫性子空間 $L^q(0\leqslant q\leqslant n)$ 都必定包含 L^n 的零元素 O (也是 E^n 的原点). 但在討論 E^n 时, E^n 中的子集 L^n 并不占有特殊的地位;实际上, E^n 的子集

$$a^0+L^q=\{a^0+x\,|\,x\in L^q\}$$

与 L^q 占有同等的地位, 这里 a^0 是 E^n 的任一点. 我們把 E^n 的每一个子集 a^0+L^q 都叫作一个 **q 維的超平面**,記作 $E^q(a^0, L^q)$. 当 $q=0, 1, 2$ 或 n 时, $E^q(a^0, L^q)$ 自然分別是 E^n 中的点,直綫,平面或 E^n 自身. 下面的命題是明显的.

1 命題　如果 $a^0, b\in E^n$, 則

$$E^q(b, L^q)=E^q(a^0, L^q), \text{ 当 } b-a^0\in L^q,$$

$$E^q(b, L^q)\cap E^q(a^0, L^q)=\phi, \text{ 当 } b-a^0\overline{\in} L^q. ▌$$

本命題的第一个結論的一个特殊情形是 $a^0\in L^q$, $b=0$; 即 $E^q(a^0, L^q)=E^q(O, L^q)$, 当 $a^0\in L^q$. 这时候 $L^q=a^0+L^q$ 是通过原点 O 的一个超平面. 第二个結論中的两个超平面叫作**平行的**超平面.

現在我們来給出 q 維的超平面 $E^q(a^0, L^q)$ 的参数方程. 取定 L^q 的一个基 $e^1, e^2, \cdots, e^q$;然后 L^q 的任一元素是这些基元素的唯一的一个綫性組合,因而 $E^q(a^0, L^q)$ 的任一点 x 有唯一的表示

$$x=a^0+\lambda_1e^1+\lambda_2e^2+\cdots+\lambda_qe^q, \tag{2}$$

叫作 $E^q(a^0, L^q)$ 的对于这个基的**参数方程**,以 q 个有次序的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ 为参数. 我們把 $\{a^0; e^1, e^2, \cdots, e^q\}$ 叫作 $E^q(a^0, L^q)$ 中的一个**斜角坐标系**或**仿射坐标系**, $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q)$ 叫作点 x 在这坐标系中的**斜角坐标**或**仿射坐标**. 这里的 q 可以是 n; 当 $q=n$ 时, $E^n=E^n(a^0, L^n)=E^n(O, L^n)$ 中可以有坐标系 $\{a^0; e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ 与 $\{O; e^1, e^2, \cdots, e^n\}$.

如果命(图 1)

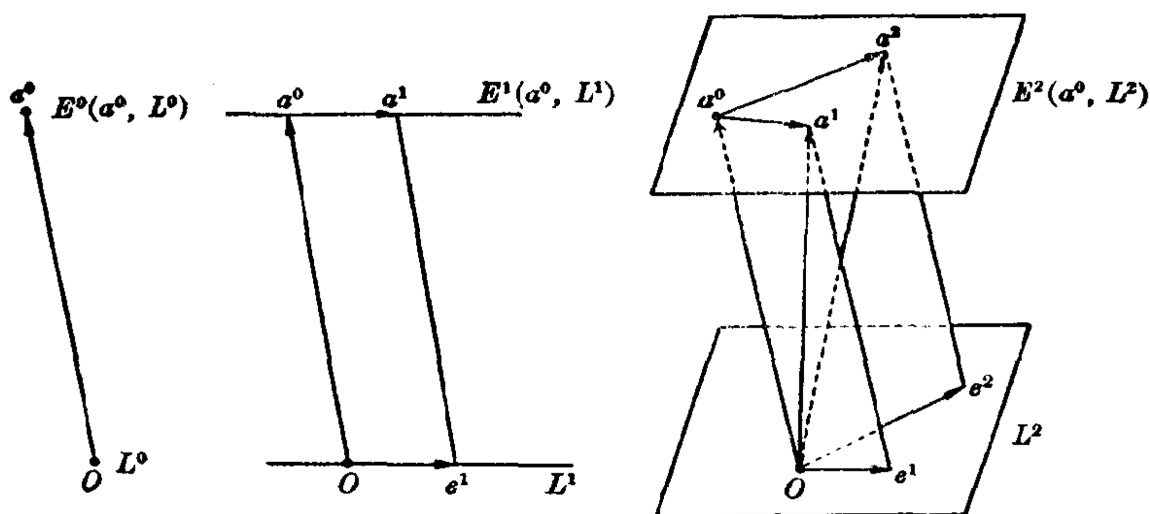


图 1

$$a^0+e^i=a^i, \quad i=1, 2, \cdots, q, \tag{3}$$

则式(2)是

$$x=a^0+\lambda_1(a^1-a^0)+\lambda_2(a^2-a^0)+\cdots+\lambda_q(a^q-a^0). \tag{2'}$$

点 a^i 当然都属于 $E^q(a^0, L^q)$. 当 $n=3$, $q=2$ 时,式(2)或式(2′)就是通常解析几何教程中的一点 a^0 与两个不共綫的向量 $e^1=a^1-a^0$, $e^2=a^2-a^0$ 所决定的平面的参数方程.

在式(2′)中, $q+1$ 个点 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 的地位是不对称的;这是由于 a^0, 而非其他的点,是 $E^q(a^0, L^q)$ 中斜角坐标系的原点. 为着克服这个缺点,我們引进

$$\lambda_0=1-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_q);$$

因而式(2′)等价于下列两个对称的式子:

$$x=\lambda_0a^0+\lambda_1a^1+\cdots+\lambda_qa^q, \tag{4}$$

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_q=1. \tag{5}$$

以上的結果可总結为下面的命題:

2 命題 如果 $\{e^1, e^2, \cdots, e^q\}$ 是 L^q 的一个基,而且 $a^i=a^0+e^i$, 則 E^n 中的超平面 $E^q(a^0, L^q)$ 有参数方程(2)或(2′),或对称的参数方程(4)与(5). **]**

3. 最 广 点 組

式(4)与(5)具有对称的形式，在代数拓扑中有重要的作用. 因此，我們引进下面的定义，以便于討論 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 这种点組如何决定一个 q 維的超平面(定理4).

3 定义 設

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^q \tag{6}$$

是 E^n 的点，$0 \leqslant q \leqslant n$. 在 $q=0$ 时，式(6)中只一个点 x^0，我們說它**占有最广位置**. 在 $q>0$ 时，如果

$$x^1-x^0,\ x^2-x^0,\ \cdots,\ x^q-x^0 \tag{7}$$

綫性无关，我們就說式(6)中这組点占有最广位置. 占有最广位置的点組也簡称为**最广点組**.

例 4 式(2′)或(4)中的点組 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 最广. 最广的点組不必綫性无关；例如 L^n 中的零元素与 n 个基元素 $O, e^1, e^2, \cdots, e^n$ 組成最广的点組，但非綫性无关的点組. 但綫性无关的点組

$$y^0,\ y^1,\ y^2,\ \cdots,\ y^q$$

必最广. 事实上，因为这給定的点組綫性无关，点組 $y^1-y^0, y^2-y^0, \cdots, y^q-y^0$ 必也綫性无关，于是給定的点組最广.

定义3中的点組(6)是否最广，还与(6)中的次序无干；这是下面命題中的第二个結論.

4 命題 綫性欧几里得空間 E^n 中点組(6)最广［在 $q>0$ 时，即 E^n 中点組(7)綫性无关］的一个充要条件是：方程(其中系数 λ_i 是实数)

$$\lambda_0 x^0+\lambda_1 x^1+\cdots+\lambda_q x^q=0, \tag{8}$$

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_q=0 \tag{9}$$

蘊涵

$$\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_q=0. \tag{10}$$

因而点組(6)是否最广，与組中諸点的次序无干. 再者，最广点組

的任一子組也最广.

証　明　在 $q=0$ 时,条件总是成立的;而另一方面,一个点总是最广的. 所以这时候的命题成立.

現在設 $q>0$. 联立方程(8)与(9)等价于下面两个联立方程

$$\lambda_1(x^1-x^0)+\lambda_2(x^2-x^0)+\cdots+\lambda_q(x^q-x^0)=0, \tag{8'}$$

$$\lambda_0=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_q), \tag{9'}$$

所以命题中的条件等价于: 式(8′)与(9′)蘊涵式(10). 先証必要性. 因为点組(6)最广, 即点組(7)綫性无关, 所以式(8′)蘊涵 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_q=0$, 以及式(9′)蘊涵 $\lambda_0=0$; 于是式(8′)与(9′)蘊涵式(10). 其次証充分性. 因为式(8′)与(9′)蘊涵式(10), 所以式(8′)蘊涵 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_q=0$; 于是点組(7)綫性无关, 即点組(6)最广.

从已証明的部分立刻有命題的第二个結論. ▌

5 定理　如果 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 是 E^n 中的最广的点組, 則在 E^n 中只有唯一的一个包含这些点的最低維的超平面; 它是 q 維的, 它的参数方程是式(2′), 或式(4)与(5). 这超平面叫作由这組点所**張成的**超平面.

証　明　首先, 命 $e^i=a^i-a^0$, $i=1, 2, \cdots, q$. 綫性无关的 $e^1, e^2, \cdots, e^q$ 是一个 q 維的綫性子空間 L^q 的一个基, 因而 q 維的超平面 $E^q(a^0, L^q)$ 包含这个最广点組.

其次, 設 p 維的超平面 $E^p(b, L^p)$ 包含这个最广点組. 因为 $a^0\in E^p(b, L^p)$, 即 $b-a^0\in L^p$, 所以根据命题 1, $E^p(b, L^p)=E^p(a^0, L^p)$. 再者, $a^i-a^0\in L^p$, $i=1, 2, \cdots, q$; 因而 $L^q\subset L^p$. 所以如果 $E^p(b, L^p)$ 是包含这个最广点組的最低維的超平面, 則 $p=q$, 而且 $L^p=L^q$; 于是

$$E^p(b, L^p)=E^p(a^0, L^p)=E^q(a^0, L^q).$$

最后, $E^q(a^0, L^q)$ 的参数方程是式(2′), 或式(4)与(5). ▌

此后，我們把定理中的这个 q 維超平面記作 $E^q(a^0, a^1, \cdots, a^q)$；而且根据命題4中的第二个結論，这記号不依賴于点 $a^0, a^1, \cdots, a^q$ 的次序.

为着跟通常解析几何教程中一样，我們再証明下面的命題，用点組(6)的在 E^n 中的斜角坐标給出点組(6)最广的一个充要条件. 用 X 表示 E^n 中的点組(6)，$q\leqslant n$. 設(1)是 L^n 的一个基，而且在斜角坐标系 $\{a^0; e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ 中点 x^i 的坐标是 $(x_1^i, x_2^i, \cdots, x_n^i)$，卽 X 中的点

$$x^i=a^0+x_1^ie^1+x_2^ie^2+\cdots+x_n^ie^n, \quad i=0, 1, \cdots, q. \tag{11}$$

为着得到点組 X 最广的条件，我們形式地引进一組数

$$x_0^i=1, \quad i=0, 1, \cdots, q, \tag{12}$$

因而(11)变成

$$x^i=x_0^ia^0+x_1^ie^1+x_2^ie^2+\cdots+x_n^ie^n, \quad i=0, 1, \cdots, q. \tag{11'}$$

作矩陣

$$N(x)=\begin{pmatrix} 1 & x_1^0 & \cdots & x_n^0 \\ 1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_1^q & \cdots & x_n^q \end{pmatrix}.$$

我們在平面解析几何学里討論三点共綫的充要条件时(这时候 $n=2$, $q=2$)，遇見过这样的矩陣.

6 命題 E^n 中点組 $X=\{x^0, x^1, \cdots, x^q\}$，$q\leqslant n$，最广的一个充要条件是：矩陣 $N(x)$ 的秩等于 $q+1$.

証明 綫性代数中一条定理*) 說：矩陣 $N(x)$ 的秩小于 $q+1$ 的一个充要条件是：$N(x)$ 的諸行向量(不是 L^n 中的向量！)綫性相关，卽存在不全为零的实数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 使得

$$\lambda_0x_j^0+\lambda_1x_j^1+\cdots+\lambda_qx_j^q=0, \quad j=0, 1, \cdots, n. \tag{13}$$

所以我們現在只需要改証，点組 X 非最广的一个充要条件是：$N(x)$ 的秩小于 $q+1$.

充分性. 設 $N(x)$ 的秩小于 $q+1$. 因而根据这条代数定理有式(13)；特別地，由于式(12)，得到式(9). 再用 λ_i 乘(11)，把这样得到的方程按 i 相加，

---

*) 張禾瑞、郝鈵新，高等代数，人民教育出版社，1964，72～77 頁.

最后引用式(13)，就得到

$$\lambda_0x^0+\lambda_1x^1+\cdots+\lambda_qx^q$$
$$=(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_q)a^0+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_0x_j^0+\lambda_1x_j^1+\cdots+\lambda_qx_j^q)e^j=0, \quad (14)$$

即式(8). 因为式(13)中 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 不全为零，故式(8)与(9)不蘊涵式(10)，即 X 非最广.

必要性. 設 X 非最广，即有不全为零的实数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 使得式(8)与(9)成立. 根据式(12)把式(9)改写为

$$\lambda_0x_0^0+\lambda_1x_0^1+\cdots+\lambda_qx_0^q=0, \quad (9'')$$

即得到 $j=0$ 时的式(13). 用式(11)中的 x^i 替入式(8)，得式(14)；因为式(9)，(9″)以及(1)是基，所以得到 $j>0$ 时的式(13). 于是根据上述的綫性代数定理，$N(x)$ 的秩小于 $q+1$. ▌

习 題

1. 試証 n 維的綫性空間 L^n 的非空子集 L 是 L^n 的一个綫性子空間，当而且只当 L 滿足下述条件：如果 x 与 $y\in L$，则它們的每一个綫性組合 $\lambda x+\mu y\in L$，这里的 λ 与 μ 是实数.

2. 試証綫性的 n 維欧几里得空間 E^n 的非空子集 P 是 E^n 中的一个超平面，当而且只当 P 滿足下述条件：如果 x 与 $y\in P$，则 $\lambda x+\mu y\in P$，对于任意一对实数 λ 与 μ 使得 $\lambda+\mu=1$.

3. 設 A 是 E^n 的一个非空子集. 試証 E^n 中包含 A 的所有超平面的交集 $P(A)$ 是一个超平面；因而 $P(A)$ 是包含 A 的最小超平面.

4. 試証：如果习題 3 中的 $A=\{x^0, x^1, \cdots, x^q\}$ 是一个有限点集，则超平面 $P(A)$ 的任一点是

$$x=\lambda_0x^0+\lambda_1x^1+\cdots+\lambda_qx^q,$$
$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_q=1.$$

这时候超平面 $P(A)$ 的維数等于 q 的充要条件是什么？

如果 A 是无穷的点集，$P(A)$ 的点如何表示？

附录B　交　换　群

读第三章§§2～6时，需要本附录§§1～4，而读第四章§7时，需要本附录§5.

1. 一般概念

我们假设读者知道下述概念：**抽象群**，**子群**，群的一个元素的阶，**交换群**或 Abel 群*).

本附录只限于讨论交换群，因此，群的运算用加号"+"表示，群的单位元用"0"表示，叫做群的零元；群元 x 的逆元用"$-x$"表示；群元 x 的 m（整数）次幂用"mx"表示.

如果把线性空间定义（附录 A）中用实数乘改为用整数乘，我们得到的就是交换群.

为着便于将来引用，我们写出下面的命题：

1.1 命题（子群的特征）*) 设 G 是一个群，而且 H 是 G 的一个非空子集. H 是 G 的一个子群，当而且只当 H 满足：

1° $x, y\in H\Rightarrow x+y\in H$;

2° $x\in H\Rightarrow -x\in H$.

例 1.1 群 G 的子群的例子（读者自己证明）.

i) 设 m 是任一整数. $\{mx|x\in G\}$ 是一个子群，用 mG 表示.

ii) 设 m 是任一整数. G 的所有的元素 x，具有性质 $mx=0$ 的，用 $\{x|x\in G;\ mx=0\}$ 表示. 它们组成一个子群，也简单地用 ${}_mG$ 表示.

iii) 设 H 是 G 的一个子群. G 的一个元素 x，可能具有下述性质：存在

---

*) 张禾瑞、郝鈵新，高等代数，人民教育出版社，1964，157～170 页；或北大数学力学系，高等代数讲义，高等教育出版社，1965，349～375 页.

一个整数 $m\neq 0$, 使得 $mx\in H$. G 的、具有这性质的元素全体組成一个子群, 用 $\overline{H}$ 表示,叫作 H 在 G 中的**除閉包**. 显然 $H\subset\overline{H}$.

iv) G 的所有有限阶的元素組成一个子群,叫作 G 的**撓**(torsion)**子群**.

v) 如果 H 是 G 的一个子群,而且 $H=\overline{H}$ (H 在 G 中的除閉包), 則 H 叫作 G 的一个**除閉子群**. G 的撓子群是 G 的一个除閉子群.

設 H 是群 G 的一个子群. 如果 G 的两个元素 x, y 使得

$$x-y\in H,$$

我們就說它們**模 H 等价**,用

$$x\equiv y(\text{模 } H)$$

表示. 模 H 等价这个关系具有反身性、对称性与傳遞性. 因而根据这个关系, G 的所有的元素可以用下述方式分成若干个互不相交的子集: G 的两个元素 x 与 y 属于同一个子集 $\Leftrightarrow x$ 与 y 模 H 等价. 这种子集叫作群 G 中的**模 H 等价类**. 通常在群論中也叫作 H 在 G 中的陪集. 子群 H 是这样的一个等价类.

1.2 定义 設 H 是群 G 的一个子群, 用 x^* 表示包含 G 的元素 x 的模 H 等价类. 考慮所有的模 H 等价类所組成新集合 $\{x^*|x\in G\}$, 并且定义这集合的两个元素 x^*, y^* 間的加法运算如下:

$$x^*+y^*=(x+y)^*. \tag{1}$$

这样就得到一个群,用 G/H 表示,叫做群 G 对于子群 H 的**商群**. 我們时常把 $x\in G$ 叫做 $x^*\in G/H$ 的一个**代表**,也时常用記号 $x\in x^*$ 表示这个事实.

容易驗証本定义的合理性如下. 首先, 如果 x, $x_1\in x^*$, y, $y_1\in y^*$, 則 $(x+y)^*=(x_1+y_1)^*$; 即由(1)所定义的 x^*+y^* 是唯一的,不依賴于在 x^*, y^* 中所选擇的代表 x, y. 其次,这集合中的元素在这里定义的加法运算下滿足群的公理.

注意, G/H 是交換群; 并且等价类 H 作为商群的一元时, 是

商群的零元.

例 1.2 商群 G/H 的例子.

i) $H=0$ 时,即 H 只是一个零元时, G/H 就是 G.

ii) 設 m 是任一整数. 用 G_m 表示商群 $G/(mG)$. 因而 $G_0=G$, $G_1=\mathbf{0}$. 特别在 G 就是整数加群 J 时, J 的模 mJ 等价类就是初等数論中的模 m 同余类. 而且运算 x^*+y^* 就是初等数論中模 m 同余类的加法运算. 故 J_m 是模 m 同余类群.

1.3 定义 如果 $f: G\to G'$ 是从群 G 到群 G' 的一个映射 (群的映射永远指单值对应), 并且, 对于 G 的任二元素 x, y,

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{2}$$

则 f 叫作从 G 到 G' 的一个**同态映射**或**同态**.

在(2)中命 $y=0$, 則得到

$$f(0)=\mathbf{0}; \tag{2'}$$

命 $x+y=0$, 則得到

$$f(-x)=-f(x). \tag{2''}$$

由此推出: 对于任一整数 m,

$$f(mx)=mf(x). \tag{2'''}$$

我們說同态 f 是一个綫性映射, 指的就是同态具有性质(2)与(2''').

从方程(2)和(2''), 連同命题1.1中子群的性质 1° 与 2°, 就得到:

設 f: 群 $G\to$ 群 G' 是一个同态. H 是 G 的一个子群 $\Rightarrow f(H)$ 是 G' 的一个子群; H' 是 G' 的一个子群 $\Rightarrow f^{-1}(H')$ 是 G 的一个子群.

特别有: $f(G)$ 是 G' 的一个子群, 叫作同态 f 的象群, 用"f **象**"表示; $f^{-1}(0)$ 是 G 的一个子群, 叫作同态 f 的核, 用"f **核**"表示.

设 $f:G\to G'$ 是同态. 如果 $f(G)=G'$, 则 f 叫作**满同态**(epimorphism 或 surjective); 如果 $f^{-1}(0)=0$, 则 f 叫作**单一同态**(monomorphism 或 injective). 容易验证: f 是单一同态, 当而且只当对于 $x, y\in G$, $x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)$. 如果 $f(G)=0$, 则 f 叫作**零同态**.

如果两个同态 $f:G\to G'$, $f':G'\to G''$ 使得 f 象 $=f'$ 核, 则我们说: 图表

$$G\xrightarrow{f}G'\xrightarrow{f'}G''$$

有**恰当性**. 因此 f 是满同态或单一同态, 即图表

$$G\xrightarrow{f}G'\longrightarrow 0 \quad 或 \quad 0\longrightarrow G\xrightarrow{f}G'$$

有恰当性, 这里未用字母标明的同态是零同态.

例 1.3 同态的例子.

i) 设 H 是群 G 的一个子群. 定义映射 $i:H\to G$ 如下: $i(x)=x$, 对于 $x\in H$. i 显然是一个单一同态, 叫作**包含同态**.

ii) 设 H 是 G 的一个子群. 定义映射 $t:G\to G/H$ 如下: $t(x)=x^*$, 对于 $x\in G$. 易证 t 是一个满同态, 叫作群 G 到商群 G/H 的**自然同态**.

1.4 定理(诱导出的同态) 设 f: 群 $G\to$ 群 G' 是一个同态, 并且 H 和 H' 分别是 G 和 G' 的各一个子群, 使得 $f(H)\subset H'$. 对于 $x^*\in G/H$, 定义

$$\tilde{f}(x^*)=(f(x))^*, \tag{3}$$

这里 $(f(x))^*\in G'/H'$. 则 $\tilde{f}$: $G/H\to G'/H'$ 是一个同态. $\tilde{f}$ 叫作**由 f 所诱导出的同态**.

证 明 首先, $\tilde{f}$ 是单值映射. 事实上, 如果 $x, x_1\in x^*$, 即 $x-x_1\in H$, 则从(2)和(2″)得 $f(x)-f(x_1)\in H'$, 即

$$(f(x))^*=(f(x_1))^*.$$

其次, 从 f 的同态性质(2)与商群的加法运算, 就推出 $\tilde{f}$ 有同态性质(2). ▌

1.5 推论 在命题 1.4 的假设下, 再设 t: $G\to G/H$, t':

$G'\to G'/H'$ 都是自然同态. 则下面的图表有交换性:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ t\downarrow & & \downarrow t' \\ G/H & \xrightarrow{\tilde{f}} & G'/H' \end{array};$$

即 $t'f=\tilde{f}t$. 而且, 如果 f 是满同态, 则 $\tilde{f}$ 也是满同态. (复习题.) ▌

1.6 定义 如果同态 f: 群 $G\to$ 群 G', 把 G 一一地映满 G', 则 f 叫作一个**同构映射**或**同构**. 显然 f 是同构, 当而且只当 f 同时是满同态与单一同态.

1.7 引理 設 f: 群 $G\to$群 G', f': 群 $G'\to$ 群 G 都是同态, 而且具有性质: $f'f=$恒同, 即 $f'f(x)=x$, 对于任一元素 $x\in G$. 则 f 是单一同态, 而且 f' 是满同态.

証 明 首先, 設 $x\in G$ 使得 $f(x)=0$; 故 $f'f(x)=0$. 从假設的性质得知, $x=0$, 即 f 是单一同态. 其次, 設 x 是 G 的任一元素. 命 $f(x)=x'$; 则 $f'f(x)=f'(x')$. 从所假設的性质, $x=f'(x')$, 即 f' 是满同态. ▌

从这条引理, 立刻得到

1.8 定理 設 f: 群 $G\to$ 群 G', f': $G'\to G$ 都是同态, 而且具有下列两个性质: $f'f=$恒同, $ff'=$恒同. 则 f 和 f' 是互逆的同构. ▌

1.9 定理(一般的同构定理) 設 f: 群 $G\to$ 群 G' 是一个满同态. 設 H' 是 G' 的一个子群, 而且命 $H=f^{-1}(H')$. H 因而是 G 的一个子群. 则由 f 所誘导出的同态 $\tilde{f}$: $G/H\to G'/H'$ 是一个同构.

証 明 因为 f 是满同态 $\Rightarrow\tilde{f}$ 是满同态, 故待証的只是 $\tilde{f}$ 也是单一同态. 事实上, 設 $x^*\in G/H$, 使得 $\tilde{f}(x^*)=0$. 因为商群 G'/H' 的零元相当于子群 H', 从方程(3)得 $f(x)\in H'$; 因而 $x\in f^{-1}(H')=H$, 即 $x^*=0$. ▌

取定理 1.9 中的 $H'=0$ 时,立刻得到:

1.10 定理(特殊的同构定理) 如果 f: 群 $G\to$ 群 G' 是一个满同态,则由 f 所誘导出的同态 $\tilde{f}$: $G/(f$ 核$)\to G'$ 是同构. ▌

如果存在一个同构 f: 群 $G\to$ 群 G', 則显然 f^{-1}: $G'\to G$ 也是一个同构. 这使我們能建立:

1.11 定义 如果存在一个同构, 把两个群 G 和 G' 中的一个映成另一个,則我們說这两个群**互相同构**或**同构**,用記号 $G\approx G'$ 或 $G'\approx G$ 表示.

从这条定义可知,在証明两个群同构时,必須找出它們之間的一个同构映射. 以上的三条定理的証明都是如此的. 定理 1.10 特別常常引用.

群間的同构这个关系具有对称性;显然还有反身性和傳递性. 因而, 根据这个关系, 所有的群可以分成若干**同构类**; 我們把同一个同构类中的群看作具有相同的"結构".从抽象群的观点說,同构的群可以看作沒有区別. 故我們的主要問題是比較群的結构, 与如何从"結构簡单"的群去研究"結构复杂"的群; 而主要的工具是同态映射和同构映射. 关于后一个問題, 我們将引进直和、秩、生成元、基等概念,然后解决自由群与有限生成的群的結构問題. 关于前一个問題,我們还在这里指出有关定理 1.10 的一个命題:

1.12 命題 群 G' 是群 G 的一个同态象[即存在一个同态 f: $G\to G'$ 使得 $G'=f(G)$], 当而且只当存在 G 的一个子群 H, 使得 $G/H\approx G'$.

証 明 必要性已在定理 1.10 中証明了. 充分性的証明用例 1.3 中的 ii). ▌

习 题

1. 試証: 如果群 G 的每一非零元素的阶都等于同一个素数 $p(\geqslant 2)$, 則

G 的任一子群 H 与商群 G/H 的每一非零元素的阶也都等于 p.

2. 試証: H 是 G 的一个除閉子群(定义見例 1.1 中的 v)),当而且只当商群 G/H 的每一非零元素的阶都是 ∞.

3. 試証: 两个同态的积是一个同态,两个同构的积是一个同构.

4. 設群 $H_i \subset G_i$, $i=1, 2, 3$. 設 $f_1: G_1 \to G_2$, $f_2: G_2 \to G_3$ 是同态, 使得 $f_1(H_1) \subset H_2$, $f_2(H_2) \subset H_3$; 因而誘导出同态 $\tilde{f}_1: G_1/H_1 \to G_2/H_2$, $\tilde{f}_2: G_2/H_2 \to G_3/H_3$. 試証: 如果 $f_2 f_1 = 0$, 則 $\tilde{f}_2 \tilde{f}_1 = 0$.

5. 試証下面的三个群都同构:

$$ {}_n(J_m), \quad (J_m)_n, \quad J_{(m,n)}. $$

这里的 m 是正整数, n 是非負整数; ${}_mG$ 的定义見例 1.1 ii); J_m 的定义見例 1.2 ii); (m, n) 表示整数 m 与 n 的最大公因子.

2. 直和·秩

2.1 定义 設群 $H_i \subset$ 群 G, $i=1, 2, \cdots, n$. 如果 G 的每一元素 x 可以用下列方式唯一地表出:

$$ x = y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \quad y_i \in H_i, $$

則說 G 是 H_i 的**直和**,或 G **分解为** H_i **的直和**,用下列記号表示:

$$ G = H_1 + H_2 + \cdots + H_n. $$

我們把 H_i 叫作 G 的**直加項**.

通过 G 的分解为 H_i 的直和, 就可以把 G 的結构的研究归結为 H_i 的結构的研究;如果能够把 G 分解为最可能簡单的直加項的直和, G 的結构的研究就化簡了. 直和概念的主要功用就在此.

在直和的定义 2.1 中, 我們設 $H_i \subset G$. 現在我們要給出直和的另一个看法. 設 H_i 是任意的群, $i=1, 2, \cdots, n$. 我們能从 H_i 作出一个新群 G^0 如下. G^0 的元素集合是 $\{(y_1, y_2, \cdots, y_n) | y_i \in H_i\}$, 其中的加法运算用下述方式定义:

$$ (y_1, y_2, \cdots, y_n) + (y'_1, y'_2, \cdots, y'_n) = (y_1 + y'_1, y_2 + y'_2, \cdots, y_n + y'_n). $$

容易験証，这样的 G^0 是一个群. G^0 中的子集 $\{(0, \cdots, 0, y_i, 0, \cdots, 0) | y_i \in H_i\}$ 組成 G^0 的一个子群 H_i^0, H_i^0 同构于 H_i，而且按照定义 2.1，显然有

$$G^0 = H_1^0 + H_2^0 + \cdots + H_n^0.$$

不仅如此，而且有下列事实：如果 G 是 H_i 的直和(按定义 2.1)，则对应

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) \to y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

是从 G^0 到 G 的同构：$G^0 \approx G$，并且在这同构下 $H_i^0 \approx H_i$．（复习題.）因此，在討論直和 G 时，可以等同 H_i^0 与 H_i, G^0 与 G.

例 2.1 設群 G 的集合是 $\{(x, y) | x, y \text{ 实数}\}$，其中的加法运算是 $(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$. 設 H_1 是子群 $\{(x, 0) | x \text{ 实数}\}$, H_2 是子群 $\{(0, y) | y \text{ 实数}\}$. 則 $G = H_1 + H_2$. 这个例子有明显的几何解釋.

2.2 命題 設 H_1, H_2 是群 G 的子群，并且 G 的每一个元素 x 至少有一个如下的表示：

$$x = y_1 + y_2, \quad y_1 \in H_1, \quad y_2 \in H_2.$$

則 $G = H_1 + H_2 \Leftrightarrow H_1 \cap H_2 = 0$ (G 的零元).

証 明 必要性. 用反証法，設 $H_1 \cap H_2 \ni x \neq 0$. 則元素 x 有两个不同的表示：$y_1 = x$, $y_2 = 0$ 和 $y_1 = 0$, $y_2 = x$；这与假設 $G = H_1 + H_2$ 矛盾.

充分性. 設 G 的任一元素

$$x = y_1 + y_2 = y_1' + y_2', \quad y_i, y_i' \in H_i.$$

則元素 $y_1 - y_1' = y_2' - y_2 \in H_1 \cap H_2$，就是零元素；因而 $y_1 = y_1'$, $y_2 = y_2'$，即 x 只有唯一的一个表示，亦即 $G = H_1 + H_2$. ▌

2.3 命題 如果 $G = H_1 + H_2$，則 $G/H_1 \approx H_2$.

証 明 定义映射 $f: G \to H_2$ 如下：

$$f(x) = y_2, \quad \text{当 } x = y_1 + y_2, \ y_i \in H_i.$$

映射 f 显然是滿同态；因为 $x = y_1 + y_2$ 这个表示是唯一的，f 的核

恰是 H_1. 然后从定理 1.10 就得到本命題. ▌

2.4 命題 設群 $G=G_1+G_2+\cdots+G_n$, 而且群 $H_i\subset G_i$. 命

$$H=H_1+H_2+\cdots+H_n.$$

則

$$G/H\approx G_1/H_1+G_2/H_2+\cdots+G_n/H_n.$$

証 明 群 $G'=G_1/H_1+G_2/H_2+\cdots+G_n/H_n$ 的元素 x' 可唯一地表示为 $x_1^*+x_2^*+\cdots+x_n^*$, $x_i^*\in G_i/H_i$. 群 G 的元素 x 可唯一地表示为 $x_1+x_2+\cdots+x_n$, $x_i\in G_i$. 对于給定的 $x=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 根据关系 $x_i\in x_i^*\in G_i/H_i$ 来确定 $x'=x_1^*+x_2^*+\cdots+x_n^*\in G'$. $x\to x'$ 显然决定一个滿同态 $f: G\to G'$, 而且 f 核是 H. 根据定理 1.10, 得到本命題的結論. ▌

2.5 命題 設 f: 群 $G\to$ 群 G' 是一个同态, 而且存在一个同态 $f':G'\to G$, 使得 $f'f=$ 恒同. (从引理 1.7, f 是单一同态, 而 f' 是滿同态) 則

$$G'=f\text{ 象}+f'\text{ 核}.$$

証 明 設 x' 是 G' 的任一元素. 則 $f'(x'-ff'(x'))=f'(x')-f'(x')=0$, 即 $x'-ff'(x')\in f'$ 核. 但 $ff'(x')\in f$ 象. 故如果命 $y_1=ff'(x')$, $y_2=x'-ff'(x')$, 則 $x'=y_1+y_2$, $y_1\in f$ 象, $y_2\in f'$ 核.

根据命題 2.2, 現在只需要証明 f 象 $\cap f'$ 核 $=0$. 設 $x'\in f$ 象 $\cap f'$ 核. 因 $x'\in f$ 象, 存在 $x\in G$ 使得 $x'=f(x)$; 又因 $x'\in f'$ 核, $f'(x')=f'f(x)=0$. 从假設 $f'f=$ 恒同, 得知 $x=0$; 然后从 f 是同态, 得知 $x'=0$. ▌

2.6 定义 設 $\{x_i\}$ 是群 G 的一組元素, $i=1, 2, \cdots, r$. 如果存在一組不全为零的整数 $\{\lambda_i\}$ 使得

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_rx_r=0\ (G\text{ 的零元素}),$$

則这組元素 $\{x_i\}$ 叫作**綫性相关**; 否則叫作**綫性无关**. (注意: 这里

用整数 λ_i,不同于附录 A 中用实数.)如果 G 中含有某一組 r 个綫性无关元素 $\{x_i\}$, 但对于 G 的任一元素 x, $\{x, x_i\}$ 都綫性相关,則这一組 $\{x_i\}$ 叫作 G 的**一个最大綫性无关組**.

2.7 命題 如果 G 中含有两个最大綫性无关組 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 与 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, 則 $m=n$.

証 明 假設 $m>n$; 我們要証明这个假設将引出矛盾. 首先,在假設下,不会每一个 y_i 都是一个 x_i, 因为 Y 的最大綫性无关性.設 X 与 Y 恰有 k 个公共元素, $0\leqslant k<n$; 不妨設

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \cdots,\ x_k=y_k.$$

然后存在不全为零的整数 $a, b_1, b_2, \cdots, b_{m-k}, c_1, c_2, \cdots, c_k$, 使得

$$\begin{aligned} ay_{k+1}=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ky_k+b_1x_{k+1}\\ +b_2x_{k+2}+\cdots+b_{m-k}x_m; \end{aligned} \tag{1}$$

其中特别是 $a\neq0$, 而且 b_i 不全为零.

其次,不妨設(1)中的 $b_1\neq0$. 我們要証 $X'=\{y_1, y_2, \cdots, y_k, y_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_m\}$ 也是一个最大綫性无关組. 事实上,如果存在不全为零的整数 a_i, 使得

$$a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ky_k+a_{k+1}y_{k+1}+a_{k+2}x_{k+2}+\cdots+a_mx_m=0,$$

則 $a_{k+1}\neq0$, 因为 X 綫性无关. 然后由(1)就得到

$$\begin{aligned} (aa_1+a_{k+1}c_1)y_1+\cdots+(aa_k+a_{k+1}c_k)y_k+a_{k+1}b_1x_{k+1}\\ +(aa_{k+2}+a_{k+1}b_2)x_{k+2}+\cdots+(aa_m+a_{k+1}b_{m-k})x_m=0, \end{aligned}$$

其中 $a_{k+1}b_1\neq0$. 这与 X 的綫性无关性矛盾;故証明了 X' 是綫性无关組.

現在設 x 是 G 的任一元素. 根据 X 的最大綫性无关性,存在不全为零的整数 d, d_i 使得

$$dx+d_1y_1+\cdots+d_ky_k+d_{k+1}x_{k+1}+\cdots+d_mx_m=0,$$

其中 $d\neq0$. 从(1)得到

$$b_1dx+(b_1d_1-d_{k+1}c_1)y_1+\cdots+(b_1d_k-d_{k+1}c_k)y_k+d_{k+1}ay_{k+1}$$
$$+(b_1d_{k+2}-d_{k+1}b_2)x_{k+2}+\cdots+(b_1d_m-d_{k+1}b_{m-k})x_m=0,$$

其中 $b_1d\neq 0$. 这就証明了 X' 的最大綫性无关性.

最后,在假設 $m>n$ 下,根据上述的替换步驟对于 $h(k\leqslant k+h\leqslant m)$ 作归納法,得到一个最大綫性无关組 $y_1, y_2, \cdots, y_n, x_{n+1}, \cdots, x_m$; 这与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的最大綫性无关性矛盾,因而 $m\leqslant n$. 同理可証 $n\geqslant m$. 故 $m=n$.]

根据这个命题,我們建立:

2.8 定义 如果群 G 含有一个最大的綫性无关組 $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$, r 是自然数,則説 G 的秩是 r, 用記号 $\rho(G)=r$ 表示. 如果无自然数 r 具有这性质,則説 G 的秩无穷,用記号 $\rho(G)=\infty$ 表示.

从定义,同构的群的秩显然相同. 这説明了秩是群的結构的一个特征.

例 2.2 群的秩的例子.

i) 如果 G 的每一元素的阶都有限,則 $\rho(G)=0$.

ii) 有理数加群的秩是 1.

iii) n 个无穷循环群的直和的秩是 n.

iv) n 个无穷循环群与 m 个有限阶的循环群的直和的秩是 n.

2.9 定理(秩的可加性) 如果 H 是群 G 的一个子群,則

$$\rho(G)=\rho(H)+\rho(G/H). \tag{2}$$

証 明 首先証

$$\rho(G)\geqslant\rho(H)+\rho(G/H).$$

設 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ 和 $Z^*=\{z_1^*, z_2^*, \cdots, z_t^*\}$ 分别是 H 和 G/H 的各一个綫性无关組(不必是最大的). 命 $z_i\in G$ 是 z_i^* 的一个代表. 我們要証明 $\{Y, Z\}=\{y_1, y_2, \cdots, y_s, z_1, z_2, \cdots, z_t\}$ 是 G 的一个綫性无关組.

事实上,設

$$a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_sy_s+b_1z_1+b_2z_2+\cdots+b_tz_t=0,$$

其中 a_i, b_j 是整数. 过渡到商群(即考虑此式两端的元素属于 G 的那两个模 H 等价类),就得到

$$b_1z_1^*+b_2z_2^*+\cdots+b_tz_t^*=0.$$

因为 Z^* 綫性无关,故所有的 $b_j=0$; 因而

$$a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_sy_s=0.$$

又因为 Y 綫性无关, 故所有的 $a_i=0$; 这就証明了 $\{Y, Z\}$ 綫性无关.

因此有

$$\rho(G)\geqslant s+t \tag{2'}$$

在 $\rho(G)$ 和 $\rho(G/H)$ 都是有限数时, 我們可以取 $s=\rho(H)$, $t=\rho(G/H)$; 在 $\rho(H)$ 或 $\rho(G/H)$ 是∞时, 相应地 s 或 t 可以是任意大的自然数;故在每一情形下,从(2')得到(2). 而在后一情形时,本定理已証完.

現在設 $\rho(H)$ 和 $\rho(G/H)$ 都是有限数, 并且設 Y 和 Z^* 都是最大的綫性无关組. 我們要証明 $\{Y, Z\}$ 也是一个最大的綫性无关組.

事实上,設 $x\in G$,而且 x 是 $x^*\in G/H$ 的一个代表,根据 Z^* 的最大性,存在不全为零的整数 γ, c_j, 使得

$$\gamma x^*+c_1z_1^*+c_2z_2^*+\cdots+c_tz_t^*=0,$$

其中特别 $\gamma\neq 0$. 由此得到

$$\gamma x+c_1z_1+c_2z_2+\cdots+c_tz_t=y\in H.$$

根据 Y 的最大性,存在不全为零的整数 δ, d_i, 使得

$$\delta y+d_1y_1+d_2y_2+\cdots+d_sy_s=0,$$

其中特别 $\delta\neq 0$. 从上面两个方程得到

$$d_1y_1+d_2y_2+\cdots+d_sy_s+\delta\gamma x+\delta c_1z_1+\cdots+\delta c_tz_t=0.$$

因为 $\delta\gamma\neq 0$, 所以 $\{x, Y, Z\}$ 綫性相关. 故 $\{Y, Z\}$ 是一个最大

的綫性无关組.

現在 $\rho(G)=s+t$, 而 $s=\rho(H)$, $t=\rho(G/H)$. 本定理証完. ▌

設 p 是一个素数, 而且 G 的每一个非零元素的阶都是 p. 在上文群 G 的一組元素 $\{x_i\}$ 綫性无关的定义中, 如果把"一組不全为零的整数 $\{\lambda_i\}$"改为"一組不全 $\equiv 0$(模 p)的整数 $\{\lambda_i\}$", 則我們得到 $\{x_i\}$ **模 p 綫性无关**的定义. 然后把从命題 2.7 到定理 2.9 的討论作相应改变(我們不詳述), 就能定义群 G 的**模 p 秩**(記作 $\rho_p(G)$), 并且証明下述定理:

2.10 定理 設 p 是一个素数, G 的每一非零元素的阶都是 p, 而且 H 是 G 的一个子群. 則

$$\rho_p(G)=\rho_p(H)+\rho_p(G/H). ▌$$

习 題

1. 設 H 是 G 的一个子群, 而且 $G=G_1+G_2+\cdots+G_n$. 用 $H\cap G_i$ 表示 H 与 G 的子群 G_i 的交, 它是 H 与 G_i 的子群. 試証: 如果

$$H=(H\cap G_1)+(H\cap G_2)+\cdots+(H\cap G_n),$$

則

$$G/H\approx G_1/(H\cap G_1)+G_2/(H\cap G_2)+\cdots+G_n/(H\cap G_n).$$

試举 G 与 H 的例, 表明 H 不必有假設中的直和分解.

2. 如果同态 $f: G\to G'$ 与 $f': G'\to G''$ 使得 $f'f$ 是同构, 命題 2.5 的結論是否成立?

3. 設自同态 $f: G\to G$ 使得 $ff=f$. 試証

$$G=f\text{ 象}+f\text{ 核}.$$

4. 試应用(未知数的)綫性方程組的理論, 証明命題 2.7 的一个等价命題: 如果 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 是群 G 的一个最大綫性无关組, 則 G 的任意一組 $m+1$ 个元素 $\{y_1, y_2, \cdots, y_{m+1}\}$ 綫性相关.

5. 設 p 是一个素数, 而且 G 是 n 个 J_p 的直和. 試求 $\rho_p(G)$.

6. 試說明如何改变命題 2.7 到定理 2.9 的証明，来得到定理 2.10 的証明.

3. 有限維的自由群

3.1 定义 設 X 是交換群 G 的一組元素. 如果 G 的每一个元素 x 至少有一个如下的表示

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_mx_m, \tag{1}$$

其中 m 为有限，依賴于 x，$x_i\in X$，λ_i 是整数，則 X 就叫作 G 的一組**生成元**. 如果 X 的元素个数有限，則 G 叫作**有限生成的群**；如果 X 这組生成元又是綫性无关的，則 X 叫作 G 的一个**基**，基的元素个数叫作 G 的**維数**，而且 G 叫作一个有限維的**自由群**.

本节只討論有限維的自由群，而有限生成的群則留待下一节討論.

容易看出，生成元組、基、有限生成的群和 m 維自由群都是在群的同构下不变的概念. 还容易驗証：

3.1.1 命題 群 G 的一个有限子集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 是 G 的一个基 $\Leftrightarrow G$ 的任一元素 x 恰有一个表示(1). ∎

例 3.1 生成元組、基与自由群的例子.

i) 任意群 G 的全体元素形成 G 的一組生成元.

ii) 只有一个生成元的群是循环群. 一維的自由群是无穷循环群，也叫作自由循环群.

iii) m 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的、以整数为系数的綫性齐次式形成一个 m 維的自由群，以这 m 个未知数为一个基.

iv) 有理数加群不具有有限生成元組，因而不是一个有限維的自由群.

v) 設 x_1 和 x_2 分別是群 J 与 J_2 的生成元. $X=\{x_1, x_2\}$ 是直和 $J+J_2$ 的一組生成元，但不是 $J+J_2$ 的一个基.

从定义还容易驗証下列命題(复习題)：

3.1.2 命题　m（有限，下同）維自由群的每一非零元的阶无穷．】

3.1.3 命题　m 維自由群的秩等于 m．】

3.1.4 命题　m 維自由群的每一个基恰包含 m 个元素．】

3.1.5 命题　两有限維的自由群同构⇔它們的維数相等．】

定义 3.1 說明的是，任一群 G 的一組元素在什么条件下叫作 G 的一个基．現在我們只考虑以 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 为一个基的 m 維自由群 F；并且要討論 F 的一組 m 个元素 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 成为 F 的一个基的充要条件．根据命题 3.1.1，一个充要条件当然是：1) F 的每一个元素 x 都有一个綫性表示

$$x=\sum_{i=1}^{m} a_i y_i, \tag{2}$$

这里的 a_i 都是整数，而且 2) 元素 x 的这个表示(2)是唯一的．現在我們要証明性质 2) 是性质 1) 的推論．考虑另一个 m 維自由群 F'，以 $Z=\{z_1, z_2, \cdots, z_m\}$ 为基．而且利用自然对应 $v: z_i \to y_i$，对于 $z=\sum_{i=1}^{m} a_i z_i$ 定义

$$f(z)=\sum_{i=1}^{m} a_i v(z_i)=\sum_{i=1}^{m} a_i y_i,$$

因而得到一个同态 $f: F' \to F$（这同态 $f: F' \to F$ 叫作 v 在 F' 上的**綫性扩張**）．所以如果能只用性质 1) 証明 f 是同构，則根据基是在群的同构下不变的概念，Z 的 f 象 Y 就是 F 的一个基；因而性质 2) 是性质 1) 的推論．

現在用性质 1) 来証明 f 是同构．根据性质 1)，f 是滿同态；所以我們所要作的是只用性质 1) 来証 f 核是零．設 $z' \in F'$，使得 $f(z')=0$．在 F' 中任意地取 z'_i，使得 $f(z'_i)=x_i$, $i=1, 2, \cdots, m$．因为 F' 的秩是 m（命题 3.1.3），$\{z', z'_i\}$ 这 $m+1$ 个元素綫性相

关,因而存在 $m+1$ 不全为零的整数 b, b_i, 使得

$$bz'+b_1z'_1+\cdots+b_mz'_m=0.$$

因为 f 是同态, $f(z')=0$, 而且 $f(z'_i)=x_i$, 所以有

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=0.$$

因为 X 是綫性无关組,有 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$; 因而 $bz'=0$, $b\neq 0$. 根据命题 3.1.2, $z'=0$. 这就是我們要証明的.

这个証明了的事实立刻給出下述命題:

3.2 命題 設 m 維自由群 F 的一个基是 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. F 的一組 m 个元素 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 是 F 的一个基, 当而且只当

$$x_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j, \quad a_{ij}\ \text{整数}, \quad i=1, 2, \cdots, m. \tag{3}$$

証　明 充分性是剛才証明了的事实的推論,必要性显然. ∎

例 3.2 自由群 G 的基的例子.

i) 如果 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 是自由群 F 的一个基,而且

$$y_1=x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m,$$

則 $Y=\{y_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 也是 F 的一个基. 事实上,

$$x_1=y_1-a_2y_2-\cdots-a_my_m,$$

$$x_i=y_i, \quad i=2, 3, \cdots, m.$$

ii) 如果 $X=\{x_1, x_2\}$ 是自由群 F 的一个基,則

$$y_1=3x_1+2x_2, \quad y_2=4x_1+3x_2$$

也是 F 的一个基. 事实上,

$$x_1=3y_1-2y_2, \quad x_2=-4y_1+3y_2.$$

命題 3.2 的一个明显的推論是下述命題:

3.3 推論 設自由群 F 的一个基是 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, 而且

$$y_i=\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j, \quad b_{ij}\ \text{整数}, \quad i=1, 2, \cdots, m.$$

F 的这組元素 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 是 F 的一个基,当而且只当系

数方陣(b_{ij})是么模方陣. ∎

現在我們需要下面的一条基本的定理:

3.4 定理 m 維的自由群 F_m 的任一子群 K 还是一个有限維的自由群,而且它的維数 $\leqslant m$.

証 明 設 F_m 的一个基是 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. $X'=\{x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}\}$ 的元素的全体綫性組合形成 F_m 的一个子群,而且显然是一个 $m-1$ 維的自由群;把它記作 F_{m-1}. 命

$$H=K\cap F_{m-1};$$

它是 F_{m-1} 与 K 的子群. 我們用归納法, 假設本定理对于 $m-1$ 維的自由群 F_{m-1} 已經証明了; 因而 H 是一个自由群, 它的維数 $\leqslant m-1$. 設 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}\}$ $(k\leqslant m)$ 是 H 的一个基. K 的每一个元素

$$x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m$$

唯一地決定一个整数 a_m, 即 a_m 是 x 的单值函数 $a_m(x)$. 如果 $a_m(x)=0$ 对于所有的 $x\in K$, 則 $K\subset F_{m-1}$, 本定理已成立. 故只須考慮 $a_m(x)$ 不全为零的情形. 这时候, K 中存在一个元素

$$y_k=a_1^*x_1+a_2^*x_2+\cdots+a_m^*x_m,$$

它的末一个系数 a_m^* 是可能的最小的正数. 然后,对于 K 的任一元素 x, x 所決定的 a_m 总是 a_m^* 的倍数;因而

$$x-\frac{a_m}{a_m^*}y_k=\sum_{i=1}^{m-1}\left(a_i-\frac{a_m}{a_m^*}a_i^*\right)x_i$$

也是 H 的一个元素, 是 Y 的元素的一个綫性組合. 这就証明了 $\{Y, y_k\}$ 是 K 的一組生成元.

其次,我們来証明 $\{Y, y_k\}$ 是 K 的一个基, 即証明 K 的每一个元素恰可表成 $\{Y, y_k\}$ 的一个綫性組合. 我們用反証法, 設 K 的某一元素能表成 $\{Y, y_k\}$ 的两个不同的綫性組合;即存在不全为

零的整数 λ_i, 使得

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_k y_k = 0.$$

这里的 $\lambda_k \neq 0$, 因为 Y 是 H 的一个基. 如果把 y_i 都表成 X 的线性组合,这方程就变成 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的一个方程,其中 x_m 的系数是 $\lambda_k a_m^* \neq 0$. 这与假设 X 是 F_m 的一个基矛盾.

最后, 以上的证明说明 K 是以 $\{Y, y_k\}$ 为基的 k 维自由群 $(k \leqslant m)$. 因为定理对于 $m=0$ 显然成立, 所以这定理对于任意 m 都证明了. ▮

附 记 本证明并未给出计算 y_k 的具体方法.

现在要转到讨论整数矩阵. 注意,本节此后凡谈到矩阵,指的都是整数矩阵. 显然幺模方阵 A 的逆 A^{-1} 是幺模方阵, 两个同阶的幺模方阵的积是幺模方阵.

设 A 和 B 是两个 $n \times m$ 的矩阵. 如果存在一个 n 阶的幺模方阵 N 与一个 m 阶的幺模方阵 M, 使得

$$B = NAM,$$

我们就说 A 与 B **等价**. 这样定义的等价关系显然有反身性、对称性和传递性.

现在我们要证明下述的经典定理:

3.5 定理 如果 A 是一个 $n \times m$ 的整数矩阵,而且 A 的秩是 r, 则存在一个 n 阶的幺模方阵 N 与一个 m 阶的幺模方阵 M, 使得 $B = NAM$ 具有下述两个性质:

1) 矩阵 $B = (b_{ij})$ 是对角线式, 即 $b_{ij} = 0$ 当 $i \neq j$;

2) 把 B 的对角线元素 $b_{ii}(i=1, 2, \cdots, \min(n, m))$ 简称为 d_i, 则只有前 r 个 $d_i > 0$, 其他的都 $=0$, 而且 $d_i(i=1, 2, \cdots, r-1)$ 整除 d_{i+1}.

这样的 B 叫作 A 的**典型式**, 这 r 个 d_i 叫作 A 的**不变因子**.

典型式 B 是唯一的；即 A 的具有这两个性质的等价矩阵只有一个.

在证明本定理之前，我们需要定义矩阵 A 的四种初等变换[*]. 为着这个目的，命 E 为某阶单位方阵；$(h)_{ij}$ 为同阶方阵，其中只 (ij) 处（第 i 横行、第 j 纵列处）的元素是整数 h，其他元素都是零. 然后用同阶矩阵的加法，命

$$I_{ij}=E+(1)_{ij},\quad i\neq j;$$
$$I_i=E+(-2)_{ii},$$

I_{ij} 与 I_i 显然都是么模方阵. 然后用矩阵的乘法，定义我们所需要的四种初等变换如下：

$$t_{ij}:\ A\to I_{ij}A,\quad t'_{ij}:\ A\to AI_{ji};$$
$$t_i:\ A\to I_iA,\quad t'_i:\ A\to AI_i;$$

这里用 I_{ij} 或 I_i 左（右）乘 A 时，自然都是把它们看作是 $n(m)$ 阶方阵. 事实上，

$t_{ij}(t'_{ij})$ 是把 A 的第 i 横行（纵列）改成第 i 横行（纵列）加上第 j 横行（纵列）；

$t_i(t'_i)$ 是改变 A 的第 i 横行（纵列）的正负号.

这四种初等变换显然不改变 A 的秩. 还容易验证，适当的初等变换的积给出变换

$u_{ij}(u'_{ij})$：把 A 的第 i 横行（纵列）改成第 i 横行（纵列）减去第 j 横行（纵列）；

$v_{ij}(v'_{ij})$：把 A 的第 i 与第 j 横行（纵列）互换.

现在我们回到定理 3.5 的证明.

首先，我们要用初等变换来求出本定理中的 N 与 M，因而求出 A 的典型式 B. 命 $A=(a_{ij})$ 的秩为 r，如果 $r=0$，则 A 已经是典型式，设 $r>0$. 然后在 A 中任选一个非零的元素，经过横行与

[*] 参看张禾瑞、郝锅新，高等代数，人民教育出版社，1964，78～82 页.

纵列的互换，把它移到 (1, 1) 处. 我們还把这元素叫作 a_{11}. 如果第一横行某元素不能被 a_{11} 整除, 例如設第一横行的 a_{1j} 被 a_{11} 除后有一个余数 a'_{11}, $0<|a'_{11}|<|a_{11}|$, 則把第 j 纵列加上或减去第一纵列;經过适当次数的加或减之后, 在 $(1, j)$ 处的元素变成 a'_{11}. 互换第 1 与第 j 纵列, a'_{11} 就移到 (1, 1) 处. 如果第一纵列也有一个元素不能被 a'_{11} 整除,我們也同样地进行. 因为在(1, 1)处元素的絕对値逐次变小,继續用有限次这种方法以后,第一横行与第一纵列的全体元素必定都能被(1, 1)处的元素(还叫作 a_{11})整除. 然后再把第一纵列(横行)的适当(正或負)倍数加到其他的每一纵列(横行)上去,使得第一横行(纵列)除 a_{11} 这个元素之外都是 0. 如果这新矩陣有一元素 $a_{ij}(i, j>1)$ 不能被 a_{11} 整除, 經过横行相加可以把它移至第一横行, 再应用上面的方法. 继續这样地作初等变换,一直到新矩陣的每一元素都能被 (1, 1) 处的元素(現在叫作 d_1) 整除,而且第一横行与第一纵列的元素除 d_1 之外都是 0 为止. d_1 还可以看作是正数; 因为我們可以用初等变换改变第一横行的正負号.

把得到的这个新矩陣还記作 A, 并用 A_1 表示从 A 划去第一横行和第一纵列后的矩陣. 因为 A 的第一横行和第一纵列除 d_1 外都是 0, A_1 的任一个初等变换可以由 A 的一个初等变换来实現, 而且 A 的这种初等变换并不改变 A 的第一横行与第一纵列. 如果 A 的秩 >1, 用这种变换,得到 $d_2>0$ 在(2, 2)处; d_2 是 A_1 中全体元素的因子, 而且 A 的第二横行与第二纵列中除 d_2 外都是 0. A_1 的全体元素能被 d_1 整除, 而且 A_1 的初等变换并不改变这种性质, 所以 d_2 能被 d_1 整除. 继續应用这种办法有限次之后, 就得到本定理中所說的 A 的典型式 B.

其次,因为初等变换不改变矩陣的秩,故典型式 B 中的元素 d_i 只有最前的 r 个 >0, 其余的都 $=0$.

最后，命 D_i 表示 A 的全体 i 阶行列式的最大公因子，$1\leqslant i\leqslant r$. 根据行列式論中一个定理，初等变换也不改变 D_i. 另一方面，从典型式 B 看，D_i 是对角綫上前 i 个元素 $d_1, d_2, \cdots, d_i$ 的积. 所以

$$d_1=D_1, \quad d_i=D_i/D_{i-1}, \quad 1<i\leqslant r;$$

因而 d_i 都已經由 A 唯一地决定了. 在这意义下，这里的大于零的 d_i 叫作 A 的不变因子. ▮

現在我們要利用剛才証明了的矩陣定理 3.5 以及定理 3.4 来討論 m 維自由群 F_m 的子群. 設 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 是 F_m 的一个基. 明显地，对于任意的整数 d_i, $i=1, 2, \cdots, r\leqslant m$,

$$d_1x_1, \ d_2x_2, \ \cdots, \ d_rx_r$$

的綫性組合全体形成 X 的一个子群. 現在要証明的是下述引理：

3.6 引理　設已知 m 維自由群 F_m 以 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 为一个基，与 F_m 的一个子群 K. 則存在 F_m 的一个基 $X'=\{x'_1, x'_2, \cdots, x'_m\}$，与 $r(\leqslant m)$ 个正整数 d_i, $i=1, 2, \cdots, r$，其中的 d_i 除尽 d_{i+1}，使得 K 是以下列元素为一个基的自由群：

$$d_1x'_1, \ d_2x'_2, \ \cdots, \ d_rx'_r.$$

証　明　根据定理 3.4, K 是一个自由群，其維数 $\leqslant m$；因而 K 有一組有限个生成元. 在 K 中任取一組 n 个生成元：

$$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}.$$

(注意：n 任意，可不 $\leqslant m$；Y 是生成元組，不必是基.) 設

$$y_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

这里的系数矩陣 $A=(a_{ij})$ 是整数矩陣.

当基 X 与生成元組 Y 給定了，K 就由 A 决定了. (但如果只是 F_m 与 K 給定了，显然由于 X 与 Y 有无穷多的取法，A 就有无穷多的可能.) 如果我們能从 X 与 Y 出发，把它們变成新基 X'

与新的生成元組 Y'，使得这时候的矩陣 A 就是定理 3.5 中的典型式 B，那末我們的引理就証明了. 所以我們的証明的下一步，只須說明矩陣 A 的四种初等变换恰相当于 X 与 Y 的下列变换*).

i) 用 $x_\alpha - x_\beta$ 替代 $x_\alpha(\alpha\neq\beta)$. 因为

$$
\begin{aligned}
y_i=\sum a_{ij}x_j &= \cdots + a_{i\alpha}x_\alpha + \cdots + a_{i\beta}x_\beta + \cdots \\
&= \cdots + a_{i\alpha}(x_\alpha - x_\beta) + \cdots + (a_{i\beta}+a_{i\alpha})x_\beta + \cdots,
\end{aligned}
$$

所以相当于在矩陣 A 中，把第 β 纵列改成第 β 纵列加上第 α 纵列. 故 X 的这个变换相当于 $t'_{\beta\alpha}$: $A\to AI_{\alpha\beta}$.

ii) 用 $-x_i$ 替代 x_i. 相当于在矩陣 A 中，把第 i 纵列中的元素完全改变正負号. 所以 X 的这个变换相当于 t'_i: $A\to AI_i$.

iii) 用 $y_\alpha+y_\beta$ 替代 $y_\alpha(\alpha\neq\beta)$. 相当于在矩陣 A 中，把第 α 横行改成第 α 横行加上第 β 横行. 所以 Y 的这个变换相当于 $t_{\alpha\beta}$: $A\to I_{\alpha\beta}A$.

iv) 用 $-y_i$ 替代 y_i. 相当于在矩陣 A 中，把第 i 横行中的元素完全改变正負号. 所以 Y 的这个变换相当于 t_i: $A\to I_iA$. ▌

附 記 本引理的証明根据是自由群的子群的定理 3.4 与矩陣的定理 3.5. 定理 3.5 的証明給出具体的計算方法，而定理 3.4 的証明則不然(参看定理 3.4 后的附記).

习 題

1. 試証命題 3.1.4.

2. 試証命題 3.1.5.

3. 設自由群 F 与 F' 分別有基 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 与 $X'=\{x'_1, x'_2, \cdots, x'_m\}$，$f$: $F\to F'$ 是一个同态，而且

$$f(x_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x'_j, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

---

*) 显然这些变换是把基 X 变成新基，把生成元組 Y 变成新生成元組.

系数矩陣 $A=(a_{ij})$ 叫作同态 f 的、对于基 X 与 X' 的矩陣. 試仿照引理 3.5 的証明, 說明 A 的初等变换可理解为基的变换; 然后 A 的典型式 B 的存在可理解为新基的存在, 使得同态 f 的、对于新基的系数矩陣是 B. 試把所得的結果写成一个定理.

附　記　如果引理 B3.6 中的子群 K 也是用基給出的(不是用生成元組給出的), 則那里的系数矩陣是包含同态 $f: K\to F$ 的、对于基的矩陣.

4. 設 F 是以 $\{x_1, x_2\}$ 为基的自由群, 它的子群 K 以 $\{2x_1, 3x_2\}$ 为基. 試用习題 3 求引理 3.6 所說的、F 与 K 的新基.

5. 設 $n\times m$ 的矩陣 A 具有下述两性质: 1) 每一横行恰有两个不等于零的元素, 一个是 $+1$, 一个是 -1; 2) 如果任意地把纵列分为两組, 至少有一横行, 它的不等于零的两个元素不属于同一組. 試証 A 的秩是 $m-1$, 而且不变因子都等于 1.

[提示: 参看沙爱福、施雷发著, 江澤涵譯, 拓扑学, 高等教育出版社, 1959, 355～357 頁.]

6. 設 $n\times m$ 的矩陣 A 具有下述两性质: 1) 每一纵列恰有两个不等于零的元素, 它們的絕对值都是 1; 2) 如果任意地把横行分为两組, 至少有一纵列, 它的不等于零的两个元素不属于同一組. 試証 A 的秩或者是 $n-1$, 或者是 n; 而且在前者的情形下, 不变因子都是 1; 在后者的情形下, 一个不变因子是 2, 其他不变因子都是 1.

[提示: 同前一題的提示.]

4. 有限生成的群

本节只限于討論有限生成的群; 先指出这种群的子群及商群也是有限生成的群, 然后証明基本定理 4.4. 这些結果是第三章 §5 的根据. 本节的証明基础是 §3 中关于自由群的子群的定理 3.4 与关于整数矩陣的定理 3.5.

設群 G 是有限生成的, 它的一組生成元是 $g_1, g_2, \cdots, g_m$. 因而它的任一元素 $g=\sum_{i=1}^{m} a_i g_i$. 設 F_m 是以 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 为基的 m 維自由群, v 是自然对应: $x_i\to g_i$, 而且 $f: F_m\to G$ 是 v 在

F_m 上的綫性扩張[即当 $x=\sum a_i x_i$ 时，$f(x)=\sum a_i v(x_i)=\sum a_i g_i$]. f 显然是满同态. 反之，如果 m 維自由群 F_m 以 X 为基，而且有一个满同态 $f: F_m \to G$，則显然 X 的 f 象形成 G 的一組生成元. 这就証明了下述命題.

4.1 命題 群 G 具有 m 个生成元 $\Leftrightarrow$ 存在一个满同态 f: m 維自由群 $F_m \to G$. 因而 $G \approx F_m/(f\text{ 核})$.]

4.2 推論 如果群 G 具有 m 个生成元，而且 H 是 G 的任一子群，則商群 G/H 也具有 m 个生成元.

証 明 因为 G 是 m 維自由群 F_m 的同态象，而且商群 G/H 是 G 的满同态象（例 1.3 中的 ii)），所以 G/H 也是 F_m 的满同态象. 然后用命題 4.1.]

4.3 推論 有限生成的群 G 的任一子群 H 也是有限生成的.

証 明 設 G 是 m 維自由群 F_m 的同态 f 象. 則 $f^{-1}(H)$ 是 F_m 的子群 K; K 所以是至多 m 維的自由群（定理 3.4）. 然后应用命題 4.2 到 K 的满同态象 H.]

我們現在来叙述幷証明本节中的主要定理 4.4. 設 G 是具有 m 个生成元的交換群. 根据命題 4.1，存在一个满同态 f: m 維自由群 $F_m \to G$，而且 $G \approx F_m/(f\text{ 核})$. 把 f 核当作引理 3.6 中的群 K，把引理 3.6 中的 $m-r$ 記作 R，而且把引理 3.6 中大于 1 的 d_i 依次記作 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_\tau$，我們就証明了下面定理的第一个結論.

4.4 定理（有限生成的交換群的基本定理） 任一个有限生成的群 G 能分解为下述直和

$$G=\underbrace{J+J+\cdots+J}_{R\text{个}}+J_{\theta_1}+J_{\theta_2}+\cdots+J_{\theta_\tau},$$

这里的非負整数 $R \leqslant m$, $\tau \leqslant m-R$，而且整数 $\theta_i > 1$, θ_i 整除 θ_{i+1}.

数 $R, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_\tau$ 是群 G 的不变量完全組；換句話說，如果

G 有两个这样的直和分解,则分解中这两組数相同.

証 明 剩下要証明的是本定理的第二个結論. 首先, 整数 R 是群 G 的秩 (参看命题 2.7), 因此 R 与群 G 直和分解的选擇无关, 是 G 的不变量.

其次, 命 T 是 G 的所有有限阶的元素所組成的子群. 对于任意一个正整数 n, 用映射 $x\to nx$ 来定义一个同态 $f: T\to T$; 同态象是 nT. 命 $\varphi(n)$ 表示有限群 nT 的阶 (卽元素的个数); 它是与 G 的直和分解无关的. 如果 G 的直和分解如同本定理中第一个結論所写的, 則 T 和 nT 的相应的直和分解就是

$$T=J_{\theta_1}+J_{\theta_2}+\cdots+J_{\theta_\tau},$$
$$nT=nJ_{\theta_1}+nJ_{\theta_2}+\cdots+nJ_{\theta_\tau};$$

而且 $f: T\to nT$ 的 f 核是

$${}_nJ_{\theta_1}+{}_nJ_{\theta_2}+\cdots+{}_nJ_{\theta_\tau}=J_{(\theta_1,n)}+J_{(\theta_2,n)}+\cdots+J_{(\theta_\tau,n)}$$

(参看 §1 习題 5); 从定理 1.10 与命題 2.4 得

$$nT\approx J_{\theta_1}/J_{(\theta_1,n)}+J_{\theta_2}/J_{(\theta_2,n)}+\cdots+J_{\theta_\tau}/J_{(\theta_\tau,n)},$$
$$\varphi(n)=\frac{\theta_1}{(\theta_1,n)}\frac{\theta_2}{(\theta_2,n)}\cdots\frac{\theta_\tau}{(\theta_\tau,n)}.$$

注意, 这里的每一个因子当然 $\geqslant 1$; 而且因为 θ_i 整除 θ_{i+1}, 故如果一个因子 $=1$, 則它前面的因子都 $=1$. 对于 $i=1, 2, \cdots, \tau$, 考虑前 i 个因子的乘积:

$$\varphi_i(n)=\frac{\theta_1}{(\theta_1,n)}\frac{\theta_2}{(\theta_2,n)}\cdots\frac{\theta_i}{(\theta_i,n)};$$

当 $n=\theta_i$ 或 $0<n<\theta_i$ 时, $\varphi_i(n)$ 分别 $=1$ 或 $\neq 1$. 故 (i) θ_τ 是使得 $\varphi(n)=1$ 的 n 的最小值; (ii) θ_i 是(使得 $\varphi_i(n)=1$ 的 n 的最小值, 卽)使得

$$\varphi(n)=\frac{\theta_{i+1}}{(\theta_{i+1},n)}\frac{\theta_{i+2}}{(\theta_{i+2},n)}\cdots\frac{\theta_\tau}{(\theta_\tau,n)}$$

的 n 的最小值. θ_τ 的这个性质 (i) 就表明了 θ_τ 的不变性; 因为 $\varphi(n)$ 定义为 nT 的阶, 是不依赖于直和分解的. 现在用归纳法来证明: θ_τ, $\theta_{\tau-1}$, $\cdots$, θ_{i+1} 的不变性$\Rightarrow\theta_i$ 的不变性; 但这正是 θ_i 的性质(ii)的推论. 这就证明了 θ_1, θ_2, $\cdots$, θ_τ 都是 G 的不变量. ▌

附　记　注意引理 3.6 后的附记, 及本定理证明中如何引用引理 3.6.

为着 III § 5 中的应用, 还需要下述定理:

4.5 定理　如果群 G 是有限生成的, 而且 G 的每一个非零元素的阶都是同一个素数 p, 则 G 能分解为 $R^{(p)}(\geqslant 0)$ 个 p 阶循环群的直和. 整数 $R^{(p)}$ 是群 G 的不变量完全组.

证　明　这里的假设 G 的每一个非零元素的阶都是 p 使得定理 4.4 中的 $R=0$, 每一个 θ_i 都是 p. ▌

5. 自由群的自同态的迹数

设 G 是一个有限维自由群, f 是 G 的一个自同态. 对于 G 的一个基 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 有

$$f(x_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \cdots, m.$$

则 $A=(a_{ij})$ 是一个 m 阶整数方阵.

5.1 命题　G, f 和 A 如上所述, 则 A 的对角线上元素之和

$$\sum_{i=1}^{m}=a_{ii}$$

不依赖于基 X, 而完全由 f 所确定, 叫做**自由群 G 的自同态 f 的迹数**. 用 $\mathrm{Tr}(f, G)$ 表示.

为了叙述上的方便, 规定零群 $H=0$ 上的自同态的迹数为 0.

证　明　设 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 是 G 的另一个基, $f(y_i)=\sum_{j=1}^{m} b_{ij}y_j$, $i=1, 2, \cdots, m$. 我们现在要证明

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ii}=\sum_{i=1}^{m} a_{ii}.$$

为了书写简单，采用矩阵写法，记 $B=(b_{ij})$，则有

$$f(X)=AX \tag{1}$$

与

$$f(Y)=BY. \tag{2}$$

因为 X, Y 都是 G 的基，就有

$$Y=UX \tag{3}$$

与

$$X=VY, \tag{4}$$

这里 U 与 V 都是整数方阵. 将(4)代入(3)，得到 $Y=UVY$. 因为 Y 是基，所以

$$UV=E, \tag{5}$$

这里 E 是单位方阵 $E=(\delta_{ij})$.

由同态 f 的线性性质并由(1)与(4)，得

$$f(Y)=f(UX)=Uf(X)=UAX=UAVY.$$

将此式同(2)比较，得到

$$B=UAV,$$

即

$$b_{ij}=\sum_{k,h=1}^{m} u_{ik}\,a_{kh}\,v_{hj}, \quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

根据(5)，

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ii}=\sum_{i,k,h=1}^{m} u_{ik}\,a_{kh}\,v_{hi}=\sum_{k,h=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\,v_{ki}\right)a_{kh}$$

$$=\sum_{k,h=1}^{m}\delta_{kh}a_{kh}=\sum_{k=1}^{m} a_{kk}. \quad]$$

由迹数的定义，容易得到下面的命题:

5.2 命题 设 $h: G\to G'$ 是自由群 G 到 G' 的一个同构，f, f' 分别是 G, G' 上的自同态，满足 $f'h=hf$，则

$$\mathrm{Tr}(f,\ G)=\mathrm{Tr}(f',\ G').$$

请读者自己证明这个命题.

设 G 是有限维的自由群, H 是 G 的一个非零子群. 又设 f 是 G 的一个自同态, 把 H 映到 H. 如同例 1.1 iii) 中, 用 $\overline{H}$ 表示 H 的除闭包. 容易验证 $x\in\overline{H}\Rightarrow f(x)\in\overline{H}$, 即 f 把 $\overline{H}$ 映到 $\overline{H}$. 于是根据定理 1.4, f 诱导出自同态

$$\tilde{f}:G/\overline{H}\to G/\overline{H}.$$

5.3 命题 设 H 是有限维自由群 G 的子群, $\overline{H}$ 是 H 的除闭包, T 是商群 G/H 的挠子群, 则

i) $G/\overline{H}\approx(G/H)/T$;

ii) $G/\overline{H}$ 是有限维自由群或零群.

证 明 设 I 是 G 的恒同同态, 则 $I(H)=H\subset\overline{H}$. 根据定理 1.4, I 诱导一个同态

$$\tilde{I}:G/H\to G/\overline{H}.$$

又根据推论 1.5, $\tilde{I}$ 是满同态. 根据定理 1.10, 要得到 i), 只需要证明 $\tilde{I}$ 核 $=T$.

对于 $x\in G$, 用 x^* 和 $\bar{x}^*$ 分别表示 x 所代表的 G/H 和 $G/\overline{H}$ 中的元素. 则 $\tilde{I}(x^*)=\bar{x}^*$. 因此, $x^*\in\tilde{I}$ 核的充分必要条件是 $x\in\overline{H}$. 另一方面, 由除闭包(例 1.1 iii)) 和挠子群(例 1.1 iv)) 的定义容易验证, $x^*\in T$ 的充分必要条件也是 $x\in\overline{H}$. 于是有

$$\tilde{I}\text{ 核}=T.$$

结论 i) 得证.

由于 G/H 是有限生成群, 根据定理 4.4, 从 i) 可推得 $G/\overline{H}$ 是有限维自由群($\overline{H}\neq G$ 时)或零群($\overline{H}=G$ 时), ii) 得证. ▌

5.4 定理(迹数可加性定理) 如果有限维自由群 G 的一个自同态 f 把 G 的一个子群 H 映到 H, 则

$$\mathrm{Tr}(f,\ G)=\mathrm{Tr}(f,\ H)+\mathrm{Tr}(\tilde{f},\ G/\overline{H}).$$

这里 $\overline{H}$ 是 H 的除闭包, $\tilde{f}$ 是 f 所诱导的. (因为 H、$G/\overline{H}$ 都是自由群, 右边的迹数都有意义.)

证　明　根据引理3.6, 可取G的一个基$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, 使得$\{d_1x_1, d_2x_2, \cdots, d_rx_r\}$是$H$的一个基. 于是$\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$就是$\overline{H}$的基. 而且若用$\bar{x}^*$表示$x$在$G$中的模$\overline{H}$等价类, 则$G/\overline{H}$有基$\{\bar{x}^*_{r+1}, \bar{x}^*_{r+2}, \cdots, \bar{x}^*_m\}$.

现在设

$$f(x_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \cdots, m. \tag{6}$$

因为$f(\overline{H})\subset\overline{H}$, 所以当$i\leqslant r$, 且$j>r$时$a_{ij}=0$. 于是对于$H$的基元$d_ix_i$就有

$$\begin{aligned}f(d_ix_i)&=d_i\sum_{j=1}^{r}a_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}d_ix_j\\&=\sum_{j=1}^{r}\left(a_{ij}\cdot\frac{d_i}{d_j}\right)d_jx_j, \quad i=1, 2, \cdots, r,\end{aligned}$$

因而

$$\operatorname{Tr}(f, H)=\sum_{i=1}^{r}\left(a_{ii}\frac{d_i}{d_i}\right)=\sum_{i=1}^{r}a_{ii}. \tag{7}$$

根据f诱导出的$\tilde{f}$的定义和(6),

$$\tilde{f}(\bar{x}^*_i)=\overline{(f(x_i))}^*=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\bar{x}^*_j, \quad i=r+1, r+2, \cdots, m,$$

而$\bar{x}^*_1=\bar{x}^*_2=\cdots=\bar{x}^*_r=0\in G/\overline{H}$, 于是

$$\tilde{f}(\bar{x}^*_i)=\sum_{j=r+1}^{m}a_{ij}\bar{x}^*_j, \quad i=r+1, r+2, \cdots, m.$$

因而

$$\operatorname{Tr}(\tilde{f}, G/\overline{H})=\sum_{i=r+1}^{m}a_{ii}. \tag{8}$$

综合(7)和(8)就证明了本命题. ▌

索　引

六 画

七　画

八　画

九　画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画